

Corrigé du Devoir Surveillé n°1

Exercice 1 Déterminons la forme algébrique des nombres complexes z_1 et z_2 :

1. Pour z_1 :

$$z_1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}i\right) \left(-\frac{1}{4} + \frac{2}{3}i\right) = -\frac{1}{12} + \frac{2}{9}i - \frac{3}{16}i + \frac{6}{12}i^2 = -\frac{1}{12} - \frac{1}{2} + \left(\frac{32}{144} - \frac{27}{144}\right)i$$

Ainsi, sous forme algébrique :

$$z_1 = -\frac{7}{12} + \frac{5}{144}i$$

2. Pour z_2 :

$$z_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{2}{4} + \frac{3}{16}$$

Ainsi, sous forme algébrique :

$$z_2 = \frac{11}{16}$$

Exercice 2 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $z = (x^2 - 4x + 3) + i(2x)$ et $z' = -x + i(x^2 - 5x + 4)$.

a) z est un imaginaire pur si et seulement si :

$$\operatorname{Re}(z) = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = 3$$

Calcul de z le cas échéant :

- Si $x = 1$, alors $z = 2i$.
- Si $x = 3$, alors $z = 6i$.

b) z' est un réel si et seulement si :

$$\operatorname{Im}(z') = 0 \iff x^2 - 5x + 4 = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = 4$$

Calcul de z' le cas échéant :

- Si $x = 1$, alors $z' = -1$.
- Si $x = 4$, alors $z' = -4$.

$$c) z = z' \iff \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = -x \\ 2x = x^2 - 5x + 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 3x + 3 = 0 \\ x^2 - 7x + 4 = 0 \end{cases}$$

Pour la première équation, $\Delta = 9 - 12 = -3 < 0$, donc elle n'a pas de solution réelle. Par conséquent, il n'existe aucun réel x tel que $z = z'$.

Exercice 3 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$an + b + \frac{c}{n+2} = \frac{an^2 + (2a+b)n + (2b+c)}{n+2}$$

Par identification avec $f(n) = \frac{4n^2+3n+5}{n+2}$, on obtient :

$$\begin{cases} a = 4 \\ 2a + b = 3 \\ 2b + c = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 4 \\ b = -5 \\ c = 15 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(n) = 4n - 5 + \frac{15}{n+2}$.

2. Comme $4n - 5 \in \mathbb{Z}$, $f(n) \in \mathbb{Z} \iff (n+2) \mid 15$.

Les diviseurs positifs de 15 sont 1, 3, 5, 15.

$$- n + 2 = 1 \iff n = -1 \notin \mathbb{N}$$

$$- n + 2 = 3 \iff n = 1 \in \mathbb{N}$$

$$- n + 2 = 5 \iff n = 3 \in \mathbb{N}$$

$$- n + 2 = 15 \iff n = 13 \in \mathbb{N}$$

Les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ cherchées sont $n \in \{1, 3, 13\}$.

Exercice 4 (a) Supposons que $7 \mid (3a + 4b)$. Or $7 \mid (7a + 7b)$. On déduit que $7 \mid (7a + 7b) - (3a + 4b)$ donc $7 \mid (4a + 3b)$.

(b) Supposons que $7 \mid (4a + 3b)$. Or $7 \mid (7a + 7b)$. On déduit que $7 \mid (7a + 7b) - (4a + 3b)$ donc $7 \mid (3a + 4b)$.

Conclusion : $7 \mid (3a + 4b) \iff 7 \mid (4a + 3b)$.

Exercice 5 On cherche tous les couples $(x; y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x^2 - 9y^2 = 18$.

$$x^2 - 9y^2 = 18 \iff x^2 - (3y)^2 = 18 \iff (x - 3y)(x + 3y) = 18.$$

$(x - 3y)(x + 3y) = 18$ avec $(x; y) \in \mathbb{N}^2 \implies (x + 3y) \geq 0$ et $(x - 3y) \geq 0$. On déduit que $(x - 3y)$ et $(x + 3y)$ sont deux diviseurs positifs de 18 dont le produit est 18 avec $(x - 3y) \leq (x + 3y)$.

Or les diviseurs positifs de 18 sont 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 et 18. On déduit que les couples $(x; y) \in \mathbb{N}^2$ vérifient :

$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ x + 3y = 18 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x - 3y = 2 \\ x + 3y = 9 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x - 3y = 3 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$$

Résolution des systèmes :

$$\begin{aligned} - \begin{cases} x - 3y = 1 \\ x + 3y = 18 \end{cases} &\iff \begin{cases} (x + 3y) + (x - 3y) = 19 \\ (x + 3y) - (x - 3y) = 17 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2x = 19 \\ 6y = 17 \end{cases} &\iff \begin{cases} x = 9,5 \notin \mathbb{N} \\ y = \frac{17}{6} \notin \mathbb{N} \end{cases} \\ - \begin{cases} x - 3y = 2 \\ x + 3y = 9 \end{cases} &\iff \begin{cases} (x + 3y) + (x - 3y) = 11 \\ (x + 3y) - (x - 3y) = 7 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2x = 11 \\ 6y = 7 \end{cases} &\iff \begin{cases} x = 5,5 \notin \mathbb{N} \\ y = \frac{7}{6} \notin \mathbb{N} \end{cases} \\ - \begin{cases} x - 3y = 3 \\ x + 3y = 6 \end{cases} &\iff \begin{cases} (x + 3y) + (x - 3y) = 9 \\ (x + 3y) - (x - 3y) = 3 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2x = 9 \\ 6y = 3 \end{cases} &\iff \begin{cases} x = 4,5 \notin \mathbb{N} \\ y = 0,5 \notin \mathbb{N} \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion : L'ensemble des solutions dans $\mathbb{N}^2$ est $\mathcal{S} = \emptyset$.