

Exercice 1

1. On donne $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$. Calculer $A+B$; $A-B$; $-2A+3B$.

2. Mêmes questions avec $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \\ 0,5 & -1,5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 7 & 2,5 & -3 \\ -8 & 2 & -0,5 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Calculer les produits suivants :

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1,5 & 3 \\ -2 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = (0,5 \quad -0,5)$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$.

Parmi les produits suivants, indiquer ceux qui sont bien définis puis indiquer, le cas échéant, leur format de la matrice obtenue puis la calculer.

$$A \times B \quad A \times C \quad B \times A \quad B \times C \quad C \times A \quad C \times B \quad A^2 \quad C^2 \quad A \times (B \times C)$$

Exercice 4

Soit M la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2 ; M^3 et M^4 .
2. Conjecturer, pour tout entier naturel non nul n , une expression de M^n .
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 5

Soit M la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2 ; M^3 et M^4 .
2. Conjecturer, pour tout entier naturel $n \geq 3$, une expression de M^n .
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants, vérifier que les matrices A et B sont inverses l'une de l'autre.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 7

La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

Exercice 8

On considère le système $(S): \begin{cases} 2x + 5y = 13 \\ -3x - 8y = 11 \end{cases}$.

Déterminer les matrices A et B telles que le système s'écrit sous la forme $AX = B$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ puis résoudre ce système.

Exercice 9

On considère le système $(S): \begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ -3x + 2y + z = 3 \\ x - 3y + 2z = -4 \end{cases}$.

1. Déterminer les matrices A et B telles que le système s'écrit sous la forme $AX = B$.

2. Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{14} & \frac{1}{14} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre.

3. En déduire la résolution du système.

Exercice 10

On considère le système $(S): \begin{cases} 5x + 3y + 4z = 1 \\ 3x + 4y + 5z = 2 \\ 4x + 5y + 6z = 3 \end{cases}$.

1. Déterminer les matrices A et B telles que le système s'écrit sous la forme $AX = B$.

2. Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-14}{3} & \frac{13}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{13}{3} & \frac{-11}{3} \end{pmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre.

3. En déduire la résolution du système.

Exercice 11

Un lycée commande régulièrement des feutres pour tableau blanc au prix de 0,90 l'unité, des ramettes de 500 feuilles A4 à 4€ l'unité, des ramettes de feuilles A3 à 9€ l'unité et des enveloppes à 11,50 le lot de 500.

On définit la matrice colonne $P = \begin{pmatrix} 0,90 \\ 4 \\ 9 \\ 11,50 \end{pmatrix}$ qui donne le prix de ces fournitures.

1. Pour la rentrée, le lycée Jean Jaurès commande 750 feutres, 50 ramettes de feuilles A4, 30 ramettes de feuilles A3 et 2000 enveloppes.
 - (a) Traduire ces quantités par une matrice ligne Q .
 - (b) Quel produit doit-on effectuer pour calculer le coût total de la commande ?
2. Le fournisseur reçoit les commandes de trois lycées : Jean Jaurès, Léonard de Vinci et Jean Lurçat.

Les quantités commandées sont respectivement données par la matrice

$$R = \begin{pmatrix} 750 & 50 & 30 & 4 \\ 1000 & 80 & 0 & 8 \\ 100 & 100 & 80 & 12 \end{pmatrix}.$$

- (a) A quoi le coefficient 1000 correspond-il ? Interpréter également le coefficient 100.
- (b) Calculer, à l'aide d'un produit matriciel, la facture pour chacun des lycées.

Culture personnelle : qui étaient Jean Jaurès, Léonard de Vinci et Jean Lurçat ?

Exercice 12

Pour le cross des élèves de première, un lycée a commandé 120 petites bouteilles d'eau et 180 sachets de biscuits pour la somme de 238€80.

Pour le cross des élèves de terminale, un lycée a commandé 100 petites bouteilles d'eau et 190 sachets de biscuits pour la somme de 238€20.

1. Modéliser cette situation sous forme d'un système (S) de deux équations à deux inconnues x et y correspondant respectivement au prix d'une petite bouteille d'eau et d'un sachet de biscuits.
2. Déterminer les matrices A , X et B telles que le système (S) s'écrive sous la forme matricielle $AX=B$.
3. Résoudre le système sous forme matricielle et interpréter les résultats dans le contexte de l'exercice.

Exercice 13

Déterminer les réels x et y tels que $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$.

Exercice 14

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

Exercice 15

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $6A - A^2$.
2. En déduire que A est inversible et que sa matrice inverse A^{-1} peut s'écrire sous la forme $A^{-1} = \alpha I_2 + \beta A$ où α et β sont deux réels à déterminer.

Exercice 16

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 .
2. Vérifier que $A^2 + A = 2I_3$.
3. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .