

Chapitre 3 : Notion de matrices

I. Généralités sur les matrices

1. Définitions

Définition : Une **matrice** de taille $n \times p$ est un tableau de nombres réels formé de n lignes et p colonnes. Une telle matrice s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Remarques :

- On note une telle matrice également sous la forme $(a_{i,j})$ avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$.
- Le coefficient $(a_{i,j})$ désigne le coefficient situé sur la i -ième ligne et j -ième colonne.
- On peut aussi définir des matrices à coefficients complexes.

Exemple 1 : $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0,5 & 4 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes donc de taille 2×3 .

2. Matrices particulières

Matrices particulières :

- Une matrice de taille $1 \times p$ est appelée une matrice ligne.
- Une matrice de taille $n \times 1$ est appelée une matrice colonne.
- Une matrice de taille $n \times n$ est appelée une matrice carrée.
- Une matrice carrée telle que de taille $n \times n$ dont tous les termes $(a_{i,j})_{i \neq j}$ sont nuls et dont les termes $(a_{i,i})$ sont non tous nuls est appelée matrice diagonale.
- La matrice diagonale d'ordre n dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 est appelée matrice identité d'ordre n et notée I_n .
- Une matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls est appelée matrice nulle et notée $O_{n,p}$.

Remarques :

- On note $\text{Diag}(d_1; d_2; \dots; d_n)$ la matrice diagonale d'ordre n dont les coefficients diagonaux sont respectivement $d_1; d_2; \dots; d_n$.
- La matrice nulle carrée d'ordre n est notée O_n .

Exemple 2 : Pour chacune des matrices suivantes, préciser sa taille et la dénommer correctement.

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{9} & -15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction :

$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{9} & -15 \end{pmatrix}$ est de taille 1x3 et est une matrice ligne.

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est de taille 2x1 et est une matrice colonne.

$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est de taille 2x2 et est une matrice carré.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de taille 3x3 et est la matrice carré identité I_3 .

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de taille 3x3 et est la matrice carré nulle O_3 .

Définition : Deux matrices sont égales si elles ont la même taille et ont des coefficients égaux placés aux mêmes positions autrement dit deux matrices $A=(a_{i,j})$ et $B=(b_{i,j})$ de taille $n \times p$ sont égales lorsque :

$$\forall i \in \{1; 2; \dots; n\} \text{ et } j \in \{1; 2; \dots; p\}, a_{i,j} = b_{i,j}$$

Définition : Une matrice carrée d'ordre n , $A=(a_{i,j})$, est dite symétrique lorsque

$$\forall (i,j) \in \{1; 2; \dots; n\}^2, a_{i,j} = a_{j,i}$$

Exemple 3 : $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & 11 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique.

Définition : On appelle matrice transposée d'une matrice carrée d'ordre n , $A = (a_{i,j})$, la matrice notée ${}^tA = (a_{j,i})$.

Exemple 4 : La matrice transposée de la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -7 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ est ${}^tA = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ -3 & 0 & 4 \\ 5 & -7 & -1 \end{pmatrix}$.

II. Opérations sur les matrices

1. Somme de deux matrices

Définition : Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de taille $n \times p$. La somme des matrices A et B notée $A+B$ est la matrice $C = (c_{i,j})$ de taille $n \times p$ telle que, pour tous $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

Remarque : on obtient ainsi la somme de deux matrices de même taille en additionnant les coefficients de même emplacement.

Exemple 5 : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $A+B$.

Correction : $A+B = \begin{pmatrix} 1+4 & -5+3 & 0+2 \\ 2-3 & 3-3 & -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

2. Produit d'une matrice par un réel

Définition : Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de taille $n \times p$ et λ un réel. Le produit de la matrice A par le réel λ noté λA , est la matrice $M = (m_{i,j})$ de taille $n \times p$ telle que pour tous $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, $m_{i,j} = \lambda \times a_{i,j}$.

Remarque : on obtient la matrice λA en multipliant tous les coefficients de A par λ .

Exemple 6 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $2A$.

Correction : $2A = \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times (-5) & 2 \times 0 \\ 2 \times 2 & 2 \times 3 & 2 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -10 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

3. Opposée d'une matrice

Définition : On appelle opposée de la matrice $A=(a_{i,j})$, la matrice notée $-A=(-a_{i,j})$.

Exemple 7 : Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer la matrice opposée de A .

Correction : La matrice opposée de A est la matrice $-A=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition : On définit ainsi la différence de deux matrices $A-B$ par $A-B=A+(-B)$.

Exemple 8 : Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $A-B$.

Correction : $A-B=\begin{pmatrix} 1-4 & -5-3 & 0-2 \\ 2-(-3) & 3-(-3) & -1-(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -8 & -2 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque : l'égalité $M+A=B$ équivaut à l'égalité $M=B-A$.

4. Premières propriétés sur les opérations sur les matrices

Propriétés : Soient A, B et C trois matrices de même taille et α et β deux réels. On a :

- $A+B=B+A$: commutativité de la somme de matrices
- $A+(B+C)=(A+B)+C$: associativité de la somme de matrices
- $1 \times A=A \times 1=A$
- $(\alpha+\beta) \times A=\alpha A+\beta A$
- $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

Preuves en exercices

Exemple 9 : Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $3A-5B$.

Correction : $3A-5B=\begin{pmatrix} 3 & -15 & 0 \\ 6 & 9 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ -15 & -15 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -17 & -30 & -10 \\ 21 & 24 & 2 \end{pmatrix}$

5. Produit de deux matrices

Définition :

Soient $L = (l_{1,1} \ l_{1,2} \ \dots \ l_{1,n})$ une matrice ligne de taille $1 \times n$ et $C = \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \\ \dots \\ c_{n,1} \end{pmatrix}$ une matrice colonne de taille $n \times 1$. Alors le produit $L \times C$ est le nombre réel défini par :

$$L \times C = (l_{1,1} \ l_{1,2} \ \dots \ l_{1,n}) \times \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \\ \dots \\ c_{n,1} \end{pmatrix} = l_{(1,1)} \times c_{1,1} + l_{(1,2)} \times c_{2,1} + \dots + l_{(1,n)} \times c_{n,1}$$

Remarque : pour que le produit $L \times C$ soit défini, L doit avoir autant de colonnes que C a de lignes.

Exemple 10 : Soit $L = (4 \ 2 \ 1)$ et $C = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Calculer $L \times C$.

Correction : L est une matrice de taille 1×3 et C est une matrice de taille 3×1 donc le produit $L \times C$ est une matrice de taille 1×1 c'est à dire un réel. On a :

$$L \times C = 4 \times 8 + 2 \times (-3) + 1 \times (-2) = 32 - 6 - 2 = 24$$

Définition : Si $A = (a_{i,j})$ une matrice de taille $m \times n$ et $B = (b_{i,j})$ une matrice de taille $n \times p$, le produit des matrices A et B noté $A \times B$ ou AB est la matrice $C = (c_{i,j})$ de taille $m \times p$ telle que, pour tous $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq p$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \times b_{k,j}$, autrement dit, l'élément $c_{i,j}$ est le produit de la i -ième ligne de A par la j -ième colonne de B .

Attention : Le produit matriciel n'est pas commutatif, c'est à dire, lorsque $A \times B$ et $B \times A$ sont définis, on a en général $A \times B \neq B \times A$.

6. Propriétés sur les produits de matrices

Propriétés : Soient A, B et C trois matrices et λ un réel.

Sous réserve de définition des produits de matrices, on a :

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$: la multiplication est associative
- $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$ et $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$: la multiplication est distributive par rapport à l'addition.
- $(\lambda A) \times B = \lambda A \times B$ et $A \times (\lambda B) = \lambda A \times B$
- $I_n \times A = A \times I_n = A$

7. Puissances d'une matrice

Propriétés : Soient A une matrice carrée d'ordre n et k un entier naturel non nul.

La puissance k -ième de A notée A^k est la matrice $A^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ fois}}$.

Remarque : Si A est non nulle alors $A^0 = I_n$.

Exemple 11 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ quatre matrices.

Calculer, lorsque cela est possible, les produits $A \times B$, $A \times C$, $C \times D$ et $B \times C$.

Correction

- A et B sont respectivement de taille 1×3 et 3×1 donc le produit $A \times B$ est calculable et de taille 1×1 c'est à dire est un réel.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \times 1 + 3 \times 4 - 1 \times (-2) = 2 + 12 + 2 = 16$$

- A et C sont respectivement de taille 1×3 et 2×3 donc le produit $A \times C$ n'est pas calculable.
- C et D sont respectivement de taille 2×3 et 3×2 donc le produit $A \times C$ est calculable et de taille 2×2 c'est à dire est une matrice carrée d'ordre 2.

$$C \times D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ -19 & 5 \end{pmatrix}$$

- B et C sont respectivement de taille 3×1 et 2×3 donc le produit $B \times C$ n'est pas calculable.

Remarque : une méthode pratique pour calculer le produit de deux matrices :

$$M = C \times D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ -19 & 5 \end{pmatrix}$$

$$m_{1,1} = 2 \times 1 + 3 \times 4 + (-1) \times (-2) = 16$$

$$m_{1,2} = 2 \times 0 + 3 \times (-1) + (-1) \times (-3) = 0$$

$$m_{2,1} = 1 \times 1 + (-5) \times 4 + 0 \times (-2) = -19$$

$$m_{2,2} = 1 \times 0 + (-5) \times (-1) + 0 \times (-3) = 5$$

III. Inverse d'une matrice et résolution de système

1. Inverse d'une matrice

Définition : Une matrice carrée A de taille n est inversible lorsqu'il existe une matrice B de taille n telle que $A \times B = B \times A = I_n$.

Définition : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. Le déterminant de A est le réel, noté $\det(A)$, défini par $\det(A) = ad - bc$.

Propriété : Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

En particulier, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, alors $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Preuve (admise)

2. Résolution d'un système

Propriété (admise) : Soient A une matrice carrée de taille n et X et B deux matrices colonnes à n lignes.

Si A est inversible alors le système d'écriture matricielle $AX = B$ admet une unique solution donnée par la matrice colonne $X = A^{-1} \times B$.

Exemple 12 : On considère le système $(S): \begin{cases} 6x+2y=3 \\ -8x+5y=12 \end{cases}$.

1. Écrire (S) sous la forme matricielle $AX=B$.
2. Résoudre, si possible, le système (S) . Justifier.

Correction

$$1. (S) \Leftrightarrow AX=B \text{ avec } A=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

$$2. \det(A)=6 \times 5 - (-8) \times 2 = 30 + 16 = 46 \neq 0 \text{ donc } A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{46} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$AX=B \Leftrightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B \Leftrightarrow X=A^{-1}B = \frac{1}{46} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$AX=B \Leftrightarrow X = \frac{1}{46} \begin{pmatrix} -9 \\ -48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-9}{46} \\ \frac{-48}{46} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-9}{46} \\ \frac{-24}{23} \end{pmatrix}$$

$$\text{Conclusion : } S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-9}{46} \\ \frac{-24}{23} \end{pmatrix} \right\}$$

Exemple 13 : Résoudre le système $(S): \begin{cases} 5x+2y=16 \\ 4x+3y=17 \end{cases}$.

Correction

$$1. (S) \Leftrightarrow AX=B \text{ avec } A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} 16 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$2. \det(A)=5 \times 3 - 4 \times 2 = 15 - 8 = 7 \text{ donc } A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$AX=B \Leftrightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B \Leftrightarrow X=A^{-1}B = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$AX=B \Leftrightarrow X = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 14 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Conclusion : } S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$