

Exercice 1

$$\begin{aligned}
 1. \quad A+B &= \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 12 & 7 \end{pmatrix} \\
 A-B &= \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -2 & -11 \end{pmatrix} \\
 -2A+3B &= \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -10 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & -3 \\ 21 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -11 \\ 11 & 17 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad A+B &= \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \\ 0,5 & -1,5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 7 & 2,5 & -3 \\ -8 & 2 & -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 11 & 0,5 & -4 \\ -7,5 & 0,5 & 5,5 \end{pmatrix} \\
 A-B &= \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \\ 0,5 & -1,5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 7 & 2,5 & -3 \\ -8 & 2 & -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -3 & -4,5 & 2 \\ 8,5 & -3,5 & 6,5 \end{pmatrix} \\
 -2A+3B &= \begin{pmatrix} 6 & 4 & -4 \\ -8 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 9 & 12 \\ 21 & 7,5 & -9 \\ -24 & 6 & -1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 13 & 8 \\ 13 & 11,5 & -7 \\ -25 & 9 & -13,5 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Exercice 2

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1,5 & 3 \\ -2 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 8 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

- Les matrices A et B sont respectivement du type 2×1 et 1×2 donc le produit $A \times B$ est calculable et du type 2×2 c'est à dire une matrice carrée d'ordre 2.

$$A \times B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 \\ 1,5 & -1,5 \end{pmatrix}$$

- Les matrices A et C sont respectivement du type 2×1 et 2×2 donc le produit $A \times C$ n'est pas calculable.
- Les matrices B et A sont respectivement du type 1×2 et 2×1 donc le produit $B \times A$ est calculable et du type 1×1 c'est à dire un réel.

$$B \times A = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -0,5 - 1,5 = -2$$

- Les matrices B et C sont respectivement du type 1×2 et 2×2 donc le produit $B \times C$ est calculable et du type 1×2 c'est à dire un réel.

$$B \times C = (0,5 \quad -0,5) \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} = (5 \quad 1)$$

- Les matrices C et A sont respectivement du type 2×2 et 2×1 donc le produit $C \times A$ est calculable et du type 2×1 .

$$C \times A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \end{pmatrix}$$

- Les matrices C et B sont respectivement du type 2×2 et 1×2 donc le produit $C \times B$ n'est pas calculable.
- A n'est pas une matrice carrée donc A^2 n'est pas calculable.
- C est une matrice carrée d'ordre 2 donc C^2 est calculable et carrée d'ordre 2.

$$C^2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -44 & 36 \\ -48 & -32 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

$$\begin{aligned} 1. \quad M^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ M^3 &= M^2 M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ M^4 &= M^3 M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Il semble que, pour tout entier naturel non nul n , $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$.
- Pour tout entier naturel non nul n , posons $P(n): M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrons, par récurrence, que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n .

Initialisation : pour $n=1$, on a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = M = M^1$ donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité :

Hypothèse de récurrence : on suppose qu'il existe un entier naturel non nul n pour lequel

$P(n)$ est vraie c'est à dire pour lequel $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

$$1. \quad M^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Il semble que, pour tout entier naturel $n \geq 3$, $M^n = O_3$.

3. La récurrence est immédiate.

Exercice 6

$$1. \quad AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \quad \text{donc } A \text{ et } B \text{ sont inverses l'une de l'autre.}$$

$$2. \quad AB = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

donc A et B sont inverses l'une de l'autre

Exercice 7

$$\det(A) = 3 \times 8 - (-3) \times 5 = 24 + 15 = 39 \neq 0 \quad \text{donc } A \text{ est inversible et}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{39} \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{39} & \frac{-5}{39} \\ \frac{3}{39} & \frac{3}{39} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{39} & \frac{-5}{39} \\ \frac{1}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}.$$

Exercice 8

$$(S): \begin{cases} 2x + 5y = 13 \\ -3x - 8y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Or, } \det(A) = 3 \times (-8) - (-3) \times 5 = -24 + 15 = -9 \neq 0 \quad \text{donc } A \text{ est inversible et}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-2}{9} \end{pmatrix}.$$

$$AX=B \Leftrightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B \Leftrightarrow X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{5}{9} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{159}{9} \\ -\frac{61}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{53}{3} \\ -\frac{61}{9} \end{pmatrix}$$

Conclusion : $S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{53}{3} \\ -\frac{61}{9} \end{pmatrix} \right\}$

Exercice 9

1. (S) : $\begin{cases} 2x+y-z=7 \\ -3x+2y+z=3 \\ x-3y+2z=-4 \end{cases} \Leftrightarrow AX=B$ avec $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

2. On observe que $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = A$. Notons $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{14} & \frac{1}{14} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 1 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$. On a :

$$AC = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 1 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

donc les matrices A et C sont inverses l'une de l'autre et $A^{-1}=C$. On déduit que :

$$AX=B \Leftrightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B \Leftrightarrow X=A^{-1}B \Leftrightarrow X=CB$$

$$AX=B \Leftrightarrow X = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 1 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{7} \\ \frac{30}{7} \\ 3 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{20}{7} \\ \frac{30}{7} \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

Exercice 10

1. (S): $\begin{cases} 5x+3y+4z=1 \\ 3x+4y+5z=2 \\ 4x+5y+6z=3 \end{cases} \Leftrightarrow AX=B$ avec $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

2. On observe que $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}=A$. Notons $C=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-14}{3} & \frac{13}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{13}{3} & \frac{-11}{3} \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -14 & 13 \\ 1 & 13 & -11 \end{pmatrix}$.

On a :

$$AC=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -14 & 13 \\ 1 & 13 & -11 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I_3$$

donc les matrices A et C sont inverses l'une de l'autre et $A^{-1}=C$. On déduit que :

$$AX=B \Leftrightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B \Leftrightarrow X=A^{-1}B \Leftrightarrow X=CB$$

$$AX=B \Leftrightarrow X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -14 & 13 \\ 1 & 13 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{Conclusion : } S=\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$$

Exercice 11

1. (a) $Q=(750 \ 50 \ 30 \ 4)$

(b) Pour calculer le coût total de la commande, on effectue le produit QP .

2. (a) $R_{2,1}=1000$ correspond au nombre de feutres commandés par le lycée Léonard de Vinci.

$R_{3,1}=100$ correspond au nombre de feutres commandées par le lycée Jean Lurçat.

$R_{3,2}=100$ correspond au nombre de ramettes A4 commandées par le lycée Jean Lurçat.

(b) La facture pour chacun des lycées est donnée par le produit RP . On a :

$$RP=\begin{pmatrix} 750 & 50 & 30 & 4 \\ 1000 & 80 & 0 & 8 \\ 100 & 100 & 80 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,90 \\ 4 \\ 9 \\ 11,50 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1191 \\ 1312 \\ 1348 \end{pmatrix}$$

Le lycée Jean Jaurès paiera 1191€.

Le lycée Léonard de Vinci paiera 1312€.

Le lycée Jean Lurçat paiera 1348€.

Exercice 12

1. Soient x et y les prix respectifs d'une petite bouteille d'eau et d'un sachet de gâteaux.

La situation peut être modélisée par le système $(S): \begin{cases} 120x + 180y = 238,80 \\ 100x + 190y = 238,20 \end{cases}$.

2. $(S) \Leftrightarrow AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 120 & 180 \\ 100 & 190 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 238,80 \\ 238,20 \end{pmatrix}$

3. Or, $\det(A) = 120 \times 190 - 100 \times 180 = 4800 \neq 0$ donc A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{4800} \begin{pmatrix} 190 & -180 \\ -100 & 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{480} & \frac{-3}{80} \\ \frac{-1}{48} & \frac{1}{40} \end{pmatrix}.$$

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{19}{480} & \frac{-3}{80} \\ \frac{-1}{48} & \frac{1}{40} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 238,80 \\ 238,20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,52 \\ 0,98 \end{pmatrix}$$

Conclusion : une petite bouteille d'eau coûte 0,52€ et un sachet de gâteau coûte 0,98€