

Chapitre 5 : Racines carrées

1. Racine carrée d'un nombre positif

Définition : Soit a un nombre positif.

- Il existe un nombre **positif** dont le carré est égal à a .
Ce nombre se note $\sqrt{a}$ et se lit « **racine carrée de a** ».
- On a donc **si $a \geq 0$ alors $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$**

Exemple 1 : $\sqrt{13}$ est le nombre positif dont le carré est égal à 13 donc $(\sqrt{13})^2 = 13$

Attention : la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas !

Exemple 2 : $(\sqrt{8})^2 = 8$ $(\sqrt{5})^2 = 5$ $(\sqrt{\pi})^2 = \pi$

2. Carré parfait

Définition : Un **carré parfait** est le carré d'un nombre entier

Exemple 3 : Les carrés parfaits inférieurs ou égaux à 100 sont :

$$0^2 = 0 ; 1^2 = 1 ; 2^2 = 4 ; 3^2 = 9 ; 4^2 = 16 ; 5^2 = 25 ; 6^2 = 36 ; 7^2 = 49 ; 8^2 = 64 ; 9^2 = 81 ; 10^2 = 100$$

3. Racine carrée d'un carré

Propriété : Pour tout nombre a , on a $\sqrt{a^2} = |a|$ c'est à dire $\sqrt{a^2} = a$ si $a \geq 0$ et $\sqrt{a^2} = -a$ si $a \leq 0$

Remarque : $\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{1} = 1$

Exemple 4 : $\sqrt{1,3^2} = 1,3$ $\sqrt{(-\pi)^2} = \pi$ $\sqrt{(-3)^2} = 3$ $\sqrt{7,1^2} = 7,1$

4. Opérations sur les racines carrées

Propriété : Pour tous nombres positifs a et b , on a

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ avec } b \neq 0$$

Démonstrations exigibles au programme notamment la première des deux

1. $(\sqrt{a \times b})^2 = a \times b$ et $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = a \times b$ donc $(\sqrt{a \times b})^2 = (\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2$
 Or $\sqrt{a \times b}$ est positif car c'est une racine carrée et $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est aussi positif comme produit de deux racines carrées donc $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

2. $(\sqrt{\frac{a}{b}})^2 = \frac{a}{b}$ et $(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$

Or $\sqrt{\frac{a}{b}}$ est positif car c'est une racine carrée et $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ est aussi positif comme quotient de deux racines carrées donc $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ #

Exemple 5 : $A = \sqrt{32} \times \sqrt{2} = \sqrt{64} = 8$ et $B = \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{48}{24}} = \sqrt{2}$

Exemple 6 : Développer et réduire $C = (3\sqrt{3} - \sqrt{2})(2\sqrt{3} + \sqrt{2})$ et $D = (\sqrt{5} - \sqrt{7})(\sqrt{3} + \sqrt{11})$

Correction :

$$C = (3\sqrt{3} - \sqrt{2})(2\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 3\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\sqrt{3} - \sqrt{2}\sqrt{2} = 6(\sqrt{3})^2 + 3\sqrt{6} - 2\sqrt{6} - (\sqrt{2})^2$$

$$C = 6 \times 3 + 3\sqrt{6} - 2\sqrt{6} - 2 = 16 + \sqrt{6}$$

$$C = (3\sqrt{3} - \sqrt{2})(2\sqrt{3} + \sqrt{2}) \text{ et } D = (\sqrt{5} - \sqrt{7})(\sqrt{3} + \sqrt{11})$$

Attention : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Contre exemple : $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7 \neq 5$

Exemple 7 : Écrire $\sqrt{45}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers et b le plus petit possible.

Correction : $\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{3^2 \times 5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

Exemple 8 : Écrire $5\sqrt{2}$ sous la forme $\sqrt{a}$ où a est un entier

Correction : $5\sqrt{2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{50}$

Exemple 9 : Calculer $M = 5\sqrt{24} - 2\sqrt{54} + \sqrt{6}$ et $N = 6\sqrt{2} + \sqrt{18}$

Correction :

$$M = 5\sqrt{24} - 2\sqrt{54} + \sqrt{6} = 5\sqrt{4 \times 6} - 2\sqrt{9 \times 6} + \sqrt{6} = 5 \times 2\sqrt{6} - 2 \times 3\sqrt{6} + \sqrt{6} = 10\sqrt{6} - 6\sqrt{6} + 1\sqrt{6} = 5\sqrt{6}$$

$$N = 6\sqrt{2} + \sqrt{18} = 6\sqrt{2} + \sqrt{9 \times 2} = 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$$