
Corrigé du Devoir Surveillé n°1

Exercice 1 – Questionnaire à choix multiples (QCM)

Question 1 : c)

$$\bullet f(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x\right) + 1 = 3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right] + 1 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} + 1 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}.$$

Question 2 : d)

$$\bullet \Delta = (-1)^2 - 4(1)(-30) = 1 + 120 = 121 = 11^2.$$
$$\bullet x_1 = \frac{1-11}{2} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+11}{2} = 6.$$

Question 3 : b)

$$\bullet f(x) = -x^2 + 2x - 3. \text{ Comme } a = -1 < 0, f \text{ admet un maximum en } \alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(-1)} = 1.$$
$$\bullet \text{ Ce maximum vaut } \beta = f(\alpha) = f(1) = -(1)^2 + 2(1) - 3 = -1 + 2 - 3 = -2.$$

Question 4 : a)

$$\bullet \text{ Forme développée : } f(x) = -(x-2)^2 - 3 = -(x^2 - 4x + 4) - 3 = -x^2 + 4x - 4 - 3 = -x^2 + 4x - 7.$$
$$\bullet \text{ Calcul du discriminant : } \Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(-1)(-7) = 16 - 28 = -12.$$
$$\bullet \text{ Comme } \Delta < 0, \text{ le polynôme n'admet aucune racine réelle.}$$

Exercice 2 – Trajectoire d'un projectile

1. La hauteur initiale correspond à $f(0) = -0,2(0)^2 + 1,2(0) + 3,2 = 3,2$ m.

2. Forme canonique et sommet :

(a) Développement : $-0,2(x-3)^2 + 5 = -0,2(x^2 - 6x + 9) + 5 = -0,2x^2 + 1,2x - 1,8 + 5 = -0,2x^2 + 1,2x + 3,2 = f(x).$

(b) Le coefficient $a = -0,2$ étant négatif, la parabole est orientée vers le bas. Le sommet a pour coordonnées (3 ; 5). La hauteur maximale atteinte par le ballon est donc de 5 m, pour une distance horizontale de 3 m par rapport au tireur.

3. Point d'impact :

(a) Résolution de $f(x) = 0$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1,2^2 - 4(-0,2)(3,2) = 1,44 + 2,56 = 4 = 2^2$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-1,2-2}{2(-0,2)} = \frac{-3,2}{-0,4} = 8 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1,2+2}{2(-0,2)} = \frac{0,8}{-0,4} = -2$$

(b) Forme factorisée : $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = -0,2(x-8)(x+2).$

- (c) La distance au sol étant une grandeur positive, le ballon retombe à la solution positive $x = 8$ m.
4. À $x = 5$ m, calculons la hauteur du ballon :

$$f(5) = -0,2(5 - 3)^2 + 5 = -0,2(2)^2 + 5 = -0,8 + 5 = 4,20 \text{ m}$$

Comme $4,20 \text{ m} > 4,10 \text{ m}$, le ballon passe au-dessus des mains du défenseur.

Exercice 3 – Économie d'entreprise

1. Recette et Bénéfice :

- (a) Chaque panneau est vendu 70 centaines d'euros, donc $R(x) = 70x$.
- (b) $B(x) = R(x) - C(x) = 70x - (x^2 + 10x + 500) = -x^2 + 60x - 500$.

2. Seuil de rentabilité :

- (a) Résolution de $B(x) = 0$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 60^2 - 4(-1)(-500) = 3600 - 2000 = 1600 = 40^2$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-60 - 40}{2(-1)} = \frac{-100}{-2} = 50 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-60 + 40}{-2} = \frac{-20}{-2} = 10$$

- (b) $a = -1 < 0$, donc la parabole est tournée vers le bas. $B(x)$ est strictement positif à l'intérieur des racines, c'est-à-dire sur $]10; 50[$.
- (c) L'entreprise réalise un bénéfice strictement positif pour un nombre entier $x \in [11; 49]$ panneaux (soit entre 11 et 49 panneaux vendus).

3. Bénéfice maximal :

- (a) $B(x)$ est un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1 < 0$. Son sommet a pour abscisse $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{60}{2(-1)} = 30$. La fonction B est donc strictement croissante sur $[0; 30]$ et strictement décroissante sur $[30; 60]$.
- (b) Le bénéfice est maximal pour $x = 30$ panneaux. Ce bénéfice vaut $B(30) = -30^2 + 60(30) - 500 = -900 + 1800 - 500 = 400$ centaines d'euros, soit 40 000 .

Exercice 4 – Optimisation géométrique

1. Expression de l'aire :

- (a) La barrière entoure 3 côtés : $x + L + x = 30 \implies L = 30 - 2x$.
- (b) Une longueur devant être strictement positive : $x > 0$ et $30 - 2x > 0 \implies x < 15$, d'où $x \in]0; 15[$.
- (c) $A(x) = x \times L = x(30 - 2x) = -2x^2 + 30x$.

2. Étude de l'aire :

- (a) $A(x) = -2(x^2 - 15x) = -2[(x - 7,5)^2 - 56,25] = -2(x - 7,5)^2 + 112,5$.
- (b) L'aire est maximale pour $x = 7,5$ m. La longueur vaut alors $L = 30 - 2(7,5) = 15$ m. L'aire maximale vaut $112,5 \text{ m}^2$.

3. Contrainte de surface minimale :

- (a) $A(x) \geq 100 \iff -2x^2 + 30x \geq 100 \iff -2x^2 + 30x - 100 \geq 0$.
- (b) En divisant par -2 : $x^2 - 15x + 50 \leq 0$. Les racines du polynôme sont $x_1 = 5$ et $x_2 = 10$. Par conséquent, $x \in [5; 10]$. La largeur de la piscine doit être comprise entre 5 m et 10 m.