
Devoir Surveillé n°1

Calculatrice non autorisée – Durée : 2 heures

Exercice 1 – Questionnaire à choix multiples (QCM)

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Question 1

f est une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Sa forme canonique est :

a) $f(x) = 3 \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{2}{3}$

b) $f(x) = 3 \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{2}{3}$

c) $f(x) = 3 \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$

d) $f(x) = 3 \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$

Question 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x - 30$. Les racines de f sont :

a) 5 et 6

b) -5 et -6

c) 5 et -6

d) -5 et 6

Question 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x - 3$. f admet :

a) un maximum qui vaut -1

b) un maximum qui vaut -2

c) un minimum qui vaut 2

d) un minimum qui vaut 1

Question 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -(x - 2)^2 - 3$. La fonction f admet :

a) 0 racine

b) 2 racines

c) 1 racine

d) 3 racines

Exercice 2 – Trajectoire d'un projectile

Lors d'un match de basket-ball, un joueur effectue un tir vers le panier. La trajectoire du ballon est modélisée par la fonction f définie par :

$$f(x) = -0,2x^2 + 1,2x + 3,2$$

où x représente la distance horizontale parcourue par le ballon (en mètres) à partir du joueur, et $f(x)$ représente la hauteur du ballon par rapport au sol (en mètres).

1. À quelle hauteur du sol le ballon est-il lancé ?
2. **Forme canonique et sommet :**
 - (a) À l'aide des formules ou par identification, montrer que la forme canonique de $f(x)$ est $f(x) = -0,2(x - 3)^2 + 5$.
 - (b) En déduire la hauteur maximale atteinte par le ballon ainsi que la distance horizontale à laquelle cet extremum est atteint.
3. **Point d'impact :**
 - (a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
 - (b) Déterminer la forme factorisée de $f(x)$.
 - (c) En déduire la distance à laquelle le ballon retombe au sol s'il ne touche pas le panier.
4. **Franchissement d'un obstacle :** Un joueur adverse situé à 5 m du tireur saute pour tenter d'intercepter le ballon. Ses mains atteignent une hauteur de 4,10 m. Le ballon passe-t-il au-dessus des mains du défenseur ? Justifier par le calcul.

Exercice 3 – Économie d'entreprise

Une entreprise spécialisée fabrique et vend des panneaux solaires de haute performance. La capacité maximale de production hebdomadaire est de 60 unités. Pour une quantité x de panneaux produites et vendues (avec $x \in [0; 60]$) :

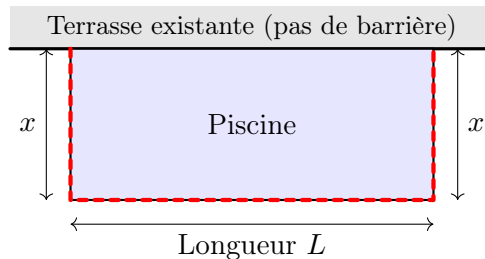
- Le coût total de production, en centaines d'euros, est donné par : $C(x) = x^2 + 10x + 500$.
- Chaque panneau est vendu au prix unitaire fixe de 70 centaines d'euros (soit 7 000 €).

1. **Recette et Bénéfice :**
 - (a) Exprimer la recette totale $R(x)$, en centaines d'euros, en fonction de x .
 - (b) Montrer que le bénéfice hebdomadaire $B(x) = R(x) - C(x)$, exprimé en centaines d'euros, est donné sur $[0; 60]$ par :
$$B(x) = -x^2 + 60x - 500$$
2. **Seuil de rentabilité :**
 - (a) Résoudre l'équation $B(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
 - (b) En déduire le signe de $B(x)$ sur l'intervalle $[0; 60]$. Justifier votre réponse.
 - (c) En déduire le nombre de panneaux que l'entreprise doit produire et vendre pour réaliser un bénéfice strictement positif.
3. **Bénéfice maximal :**
 - (a) Dresser le tableau de variations de la fonction B sur $[0; 60]$. Justifier votre réponse.
 - (b) En déduire la quantité de panneaux à vendre pour obtenir un bénéfice maximal, puis préciser le montant de ce bénéfice en euros.

Exercice 4 – Optimisation géométrique

Un propriétaire souhaite faire construire une piscine rectangulaire dans son jardin. La piscine sera installée le long d'une terrasse déjà existante, de sorte qu'il n'est pas nécessaire d'installer de barrière de sécurité du côté de la terrasse. Pour sécuriser les trois autres côtés de la piscine, le propriétaire dispose d'une barrière de sécurité de longueur totale 30 mètres.

On note x la largeur de la piscine (en mètres), perpendiculaire à la terrasse.



1. Expression de l'aire :

- Justifier que la longueur L de la piscine (parallèle à la terrasse) s'exprime en fonction de x par $30 - 2x$.
- Justifier que l'ensemble de définition de la variable x est l'intervalle $]0 ; 15[$.
- Montrer que l'aire $A(x)$ de la piscine, en m^2 , est donnée par $A(x) = -2x^2 + 30x$.

2. Étude de l'aire :

- Déterminer la forme canonique de $A(x)$.
- En déduire les dimensions de la piscine pour lesquelles l'aire est maximale. Quelle est alors cette aire maximale ?

3. Contrainte de surface minimale : Le propriétaire souhaite que l'aire de la piscine soit supérieure ou égale à 100 m^2 .

- Montrer que cela revient à résoudre l'inéquation $-2x^2 + 30x - 100 \geq 0$.
- Résoudre cette inéquation sur $]0 ; 15[$ et conclure quant aux valeurs possibles pour la largeur x .