Chapitre 2 - Généralités sur les suites

I. Suites numériques

1. Généralités

Définition : Une **suite** est une **fonction** u à valeurs réelles dont la variable est un entier naturel n

- La suite est notée $(u(n)),(u_n)$.
- L'image de n par la fonction u est notée $u(n)$ ou u_n
- $u(n)$ ou u_n se nomme le terme de rang n de la suite
- u_n se lit *« u indice n »*
- u_n est le terme général de la suite
- (u_n)ou$(u_n)_n$ désigne l'ensemble des termes de la suite pour $n\in\mathbb{N}$

Définition : L'ensemble de définition d'une suite est l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ ou une partie de celui-ci (lorsque la suite n'est définie que pour des entiers supérieurs à une valeur donnée).

Exemple 1 :
On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n=2n^2+1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0= 0 \\ v_{n+1}=2v_n^2+1 \end{cases}$$

1. Calculer les trois premiers termes de chaque suite.
2. Calculer le 5ème terme de chaque suite.

Correction

1. $u_0=1\,;u_1=2\times1^2+1=3$ et $u_2=2\times2^2+1=9$
   $v_0=0\,;v_1=2\times0^2+1=1$ et $v_2=2\times1^2+1=3$
2. Le 5ème terme de la suite (u_n) est $u_4=2\times4^2+1=33$
   Le 5ème terme de la suite (v_n) est $v_4=2\times v_3^2+1$
   Or $v_3=2\times v_2^2+1=2\times3^2+1=19$ d'où $v_4=2\times19^2+1=723$

2. Modes de générations de suites

Définition : Une suite peut être définie
- par une fonction f de la variable n. Dans ce cas on a $u_n = f(n)$.
- par une relation de récurrence. (u_n) est alors définie par son 1er terme et une relation permettant de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.
- par un algorithme.
- par un autre moyen, par exemple la suite des décimales de π.
- par un motif géométrique.

a) Suite définie par une fonction f de la variable n

La suite $(u_n)_n$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 2n + 3$ est une suite définie par une fonction.
En effet, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x + 3$.
Par cette fonction f, on peut calculer « directement » n'importe quel terme de la suite $(u_n)_n$.

Exemple 2 : Calculer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_n$.

Correction : $u_0 = 3 ; u_1 = 6 ; u_2 = 11$ et $u_3 = 18$

b) Suite définie par une relation de récurrence.

La suite $(u_n)_n$ définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n - 3 \end{cases}$ est une suite définie par son 1er terme $u_0 = 2$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = 4u_n - 3$.
Pour calculer le terme u_p, il faut connaître tous les termes précédents.
Ces derniers s'obtiennent grâce à la relation de récurrence.

Exemple 3 : Calculer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_n$.

Correction : $u_0 = 2 ; u_1 = 4 \times 2 - 3 = 5 ; u_2 = 4 \times 5 - 3 = 17$ et $u_3 = 4 \times 17 - 3 = 65$

c) Suite définie par un algorithme

L'algorithme ci-dessous défini aussi une suite. On utilise une « boucle Pour ».

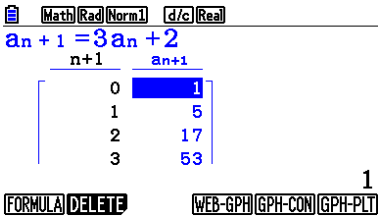
A ← 1 Pour i allant de 1 à N $A \leftarrow 3 \times A + 2$ Fin Pour	Cet algorithme calcule tous les termes de la suite les uns après les autres. u_0 vaut 1. Dans la boucle « Pour », On calcule ensuite $3u_0 + 2$ c'est à dire u_1 puis $u_2, u_3, \ldots, u_N$.

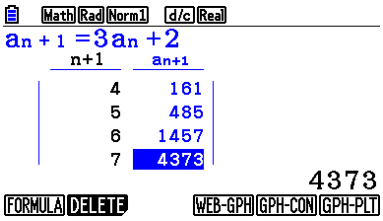
Exemple 4 :

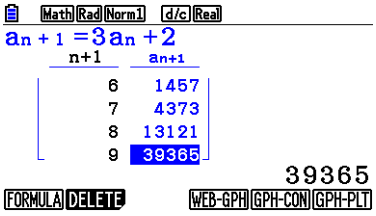
1. Utiliser le mode récurrence de votre calculatrice pour calculer les dix premiers termes.
2. Programmer l'algorithme précédent sous Python.

Correction

1.







2.

```python
u=1
for i in range(0,11) :
    u=3*u+2
    print(u)
```

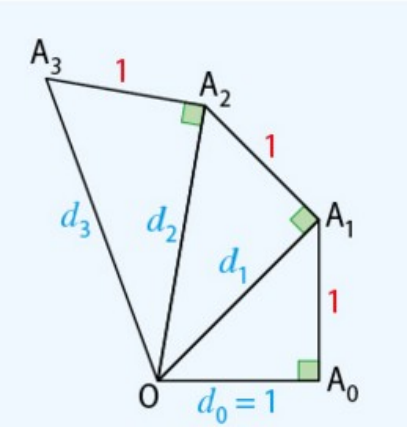
```
5
17
53
161
485
1457
4373
13121
39365
118097
354293
>>>
```

d) Suite définie par un motif géométrique

Exemple 5 : l'escargot Pythagoricien. O désigne un point du plan.

1. On construit un triangle OA_0A_1 rectangle et isocèle en A_0 tel que $OA_0=A_0A_1=1$. Calculer la longueur exacte de OA_1 ?
2. On construit un triangle OA_1A_2 rectangle en A_1 tel que $A_1A_2=1$. Calculer la longueur exacte de OA_2 ?
3. On construit un triangle OA_2A_3 rectangle en A_2 tel que $A_2A_3=1$. Calculer la longueur exacte de OA_3 ?
4. On poursuit le processus de construction des triangles OA_nA_{n+1}
   On créé ainsi une suite (d_n) de nombres définie par $d_n=OA_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. A quel nombre est égal d_{n+1} ?

Correction



1. Dans OA_0A_1 rectangle en A_0, d'après le théorème de Pythagore on a :
$OA_1^2 = OA_0^2 + A_0A_1^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ donc $OA_1 = \sqrt{2}$

2. De même, Dans OA_1A_2 rectangle en A_1, d'après le théorème de Pythagore on a :
$OA_2^2 = OA_1^2 + A_1A_2^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 3$ donc $OA_2 = \sqrt{3}$

3. De même, Dans OA_2A_3 rectangle en A_2, d'après le théorème de Pythagore on a :
$OA_3^2 = OA_2^2 + A_2A_1^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$ donc $OA_3 = \sqrt{4}$

4. De même, Dans OA_nA_{n+1} rectangle en A_n, d'après le théorème de Pythagore on a
$OA_{n+1}^2 = OA_n^2 + A_nA_{n+1}^2 = {d_n}^2 + 1^2 = {d_n}^2 + 1$ donc $OA_{n+1} = \sqrt{d_n^2 + 1}$

3. Représentation graphique d'une suite

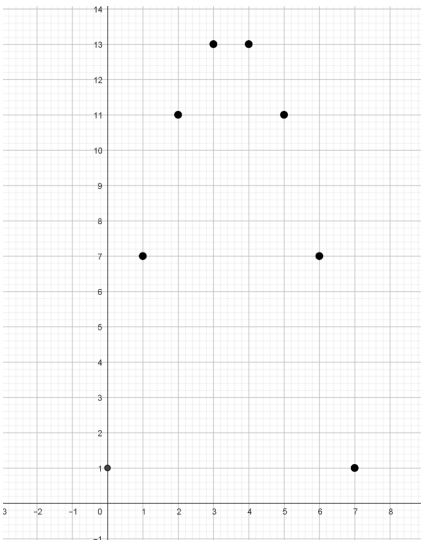
Exemple 6 : On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -n^2 + 7n + 1$.
Représenter les points $A(n;u_n)$ dans un repère (O;I;J) du plan.

Correction : calculons les huit premiers termes de la suite $(u_n)_n$:

$$u_0 = -0^2 + 7\times 0 + 1 = 1 ; u_1 = -1^2 + 7\times 1 + 1 = 7 ; u_2 = -2^2 + 7\times 2 + 1 = 11 ; u_3 = -3^2 + 7\times 3 + 1 = 13$$
$$u_4 = -4^2 + 7\times 4 + 1 = 13 ; u_5 = -5^2 + 7\times 5 + 1 = 11 ; u_6 = -6^2 + 7\times 6 + 1 = 7 ; u_7 = -7^2 + 7\times 7 + 1 = 1$$

On obtient donc les points $A(0;u_0);\ldots;A(7;u_7)$ qu'on place dans un repère (O;I;J) du plan.

$$A_0(0;1); A_1(1;7); A_2(2;11); A_3(3;13); A_4(4;13); A_5(5;11); A_6(6;7); A_7(7;1)$$



II. Sens de variation d'une suite

Définition :

- Une suite $(u_n)_n$ est dite croissante si, pour tout n, $u_{n+1} \geqslant u_n$
- Une suite $(u_n)_n$ est dite décroissante si, pour tout n, $u_{n+1} \leqslant u_n$
- Une suite $(u_n)_n$ est dite constante si, pour tout n, $u_{n+1} = u_n$
- Une suite est monotone si elle est soit croissante, soit décroissante, soit constante.

Propriété : Lorsqu'une suite $(u_n)_n$ est définie par une relation $u_n = f(n)$ où f est une fonction monotone sur $[0;+\infty[$, la suite (u_n) est également monotone, de même monotonie que la fonction f sur $[0;+\infty[$.

Exemple 6 :
Étudier les variations des suites ci-dessous définies pour tout entier naturel par :

$$u_n = 4n + (-2)^n \qquad v_n = 3n^2 - n + 1 \qquad w_n = n^2 + 9n + 1 \qquad \begin{cases} t_0 = 1 \\ t_{n+1} = t_n - (n+1)^2 \end{cases}$$

Correction

- $u_0 = 4 \times 0 + (-2)^0 = 0 + 1 = 1$
  $u_1 = 4 \times 1 + (-2)^1 = 4 - 2 = 2$
  $u_2 = 4 \times 2 + (-2)^2 = 8 + 4 = 12$
  $u_3 = 4 \times 3 + (-2)^3 = 12 - 8 = 4$ donc (u_n) est ni croissante ni décroissante.

- $v_0 = 3 \times 0^2 - 0 + 1 = 1$
  $v_1 = 3 \times 1^2 - 1 + 1 = 3 - 1 + 1 = 3$
  $v_2 = 3 \times 2^2 - 2 + 1 = 12 - 2 + 1 = 11$
  $v_3 = 3 \times 3^2 - 3 + 1 = 27 - 3 + 1 = 25$
  donc (v_n) semble croissante. Démontrons que (v_n) est, en effet, croissante.
  Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
  $v_{n+1} - v_n = (3(n+1)^2 - (n+1) + 1) - (3n^2 - n + 1) = 3(n+1)^2 - (n+1) + 1 - 3n^2 + n - 1$
  $v_{n+1} - v_n = 3(n^2 + 2n + 1) - n - 1 - 3n^2 + n$
  $v_{n+1} - v_n = 3n^2 + 6n + 3 - n - 1 - 3n^2 + n = 6n + 2$

  Or $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geqslant 0$ donc $6n + 2 \geqslant 2 > 0$ donc $v_{n+1} - v_n > 0$ donc (v_n) est strictement croissante.

Remarque : on pouvait aussi remarquer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = f(n)$ avec $f(x) = 3x^2 - x + 1$ *et donc étudier les variations de* f *puis en déduire celles de* (v_n) .

- $w_0=0^2+9\times0+1=1$
  $w_1=1^2+9\times1+1=1+9+1=11$
  $w_2=2^2+9\times2+1=4+18+1=23$
  $w_3=3^2+9\times3+1=9+27+1=37$
  donc (w_n) semble croissante. Démontrons que (w_n) est, en effet, croissante.
  Soit $n\in\mathbb{N}$, on a :
  $w_{n+1}-w_n=((n+1)^2+9(n+1)+1)-(n^2+9n+1)=n^2+2n+1+9n+9+1-n^2-9n-1$
  $w_{n+1}-w_n=2n+10$
  Or $n\in\mathbb{N}$ donc $n\geqslant0$ donc $2n+10\geqslant10>0$ donc $w_{n+1}-w_n>0$ donc (w_n) est strictement croissante.

- Soit $n\in\mathbb{N}$, on a $t_{n+1}-t_n=-(n+1)^2<0$. En effet, un carré est toujours positif ou nul donc $(n+1)^2>0$ avec $n\in\mathbb{N}$ donc $-(n+1)^2<0$ donc (t_n) est strictement décroissante.