

Exercice 1

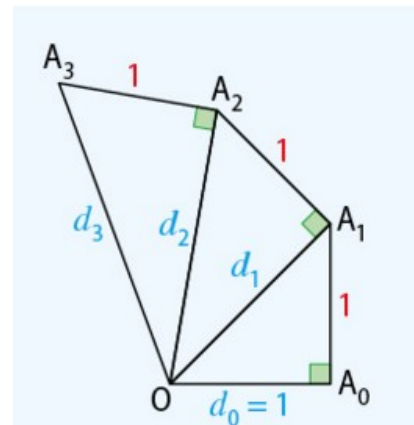
1. $u_0=0; u_1=3; u_2=6; u_3=9; u_4=12$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}=u_n+3$ avec $u_0=0$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n=3n$

Exercice 2

1. 3 lignes sont créées.
2. 6 lignes sont créées.
3. Pour chaque ville, il y a $n-1$ lignes possibles donc pour n villes il y a $n(n-1)$ trajets possibles c'est à dire $\frac{n(n-1)}{2}$ lignes car une ligne est composée d'un aller retour c'est à dire de deux trajets. On déduit que $\forall n \geq 1, u_n = \frac{n(n-1)}{2}$

Exercice 3 - L'escargot Pythagoricien

1. Dans OA_0A_1 rectangle en A_0 , d'après le théorème de Pythagore on a
 $OA_1^2 = OA_0^2 + A_0A_1^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ donc $OA_1 = \sqrt{2}$
2. De même, Dans OA_1A_2 rectangle en A_1 , d'après le théorème de Pythagore on a
 $OA_2^2 = OA_1^2 + A_1A_2^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 3$ donc $OA_2 = \sqrt{3}$
3. De même, Dans OA_2A_3 rectangle en A_2 , d'après le théorème de Pythagore on a
 $OA_3^2 = OA_2^2 + A_2A_3^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$ donc $OA_3 = \sqrt{4}$
4. De même, Dans OA_nA_{n+1} rectangle en A_n , d'après le théorème de Pythagore on a
 $OA_{n+1}^2 = OA_n^2 + A_nA_{n+1}^2 = d_n^2 + 1^2 = d_n^2 + 1$ donc $OA_{n+1} = \sqrt{d_n^2 + 1}$.
5. On déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, d_{n+1} = \sqrt{d_n^2 + 1}$.

**Exercice 4**

1. $v_0 = -5$
 $v_1 = (-5) \times 7 - 3 = -35 - 3 = -38$
 $v_2 = (-38) \times 7 - 3 = -266 - 3 = -269$
 $v_3 = (-269) \times 7 - 3 = -1883 - 3 = -1886$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 7v_n - 3$
3. A la calculatrice, on obtient $v_{35} \approx -2,1 \times 10^{30}$

Exercice 5

1. $u_0 = 0^2 - 1 = -1$; $u_1 = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$; $u_2 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$ et $u_3 = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$
2. D'après les calculs des quatre premiers termes de la suite, (u_n) semble croissante.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = ((n+1)^2 - 1) - (n^2 - 1) = (n+1)^2 - n^2 = (n+1-n)(n+1+n) = 2n+1$$
Or $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geq 0$ donc $2n+1 \geq 1 > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.

Exercice 6

- $u_n = n - \sqrt{n^2 + 9}$

$$u_0 = 0 - \sqrt{0^2 + 9} = -\sqrt{9} = -3, \quad u_1 = 1 - \sqrt{1^2 + 9} = 1 - \sqrt{10}, \quad u_2 = 2 - \sqrt{2^2 + 9} = 2 - \sqrt{13}$$

Comme la suite commence avec u_0 , le 100ème terme est $u_{99} = 99 - \sqrt{99^2 + 9} = 99 - \sqrt{9810}$

- $u_n = \frac{n+5}{n(n-1)}$

On ne peut pas calculer u_0 ni u_1 car le dénominateur est nul pour $n=0$ ou $n=1$

$$u_2 = \frac{2+5}{2 \times 1} = \frac{7}{2} \quad \text{Comme la suite commence avec } u_2, \text{ le 100ème terme est } u_{101} = \frac{106}{10100}$$

- $u_n = (-1)^n + 1$

$$u_0 = (-1)^0 + 1 = 2, \quad u_1 = (-1)^1 + 1 = 0, \quad u_2 = (-1)^2 + 1 = 2$$

Comme la suite commence avec u_0 , le 100ème terme est $u_{99} = (-1)^{99} + 1 = 0$

- $u_n = n^n$

$$u_0 = 0^0 = 1, \quad u_1 = 1^1 = 1, \quad u_2 = 2^2 = 4$$

Comme la suite commence avec u_0 , le 100ème terme est $u_{99} = 99^{99}$

Exercice 7

Le terme précédent u_n est u_{n-1} et le terme suivant u_n est u_{n+1}

- Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 3n + 1$

$$u_{n-1} = (n-1)^2 - 3(n-1) + 1 = n^2 - 2n + 1 - 3n + 3 + 1 = n^2 - 5n + 5$$

$$u_{n+1} = (n+1)^2 - 3(n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 - 3n - 3 + 1 = n^2 - n - 1$$

$$u_{2n} = (2n)^2 - 3 \times 2n + 1 = 4n^2 - 6n + 1$$

$$u_n + 1 = n^2 - 3n + 1 + 1 = n^2 - 3n + 2$$

• Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n+1}{2n+3}$

$$u_{n-1} = \frac{n-1+1}{2(n-1)+3} = \frac{n}{2n+1}$$

$$u_{n+1} = \frac{n+1+1}{2(n+1)+3} = \frac{n+2}{2n+5}$$

$$u_{2n} = \frac{2n+1}{2 \times 2n+3} = \frac{2n+1}{4n+3}$$

$$u_n + 1 = \frac{n+1}{2n+3} + 1 = \frac{n+1}{2n+3} + \frac{2n+3}{2n+3} = \frac{3n+4}{2n+3}$$

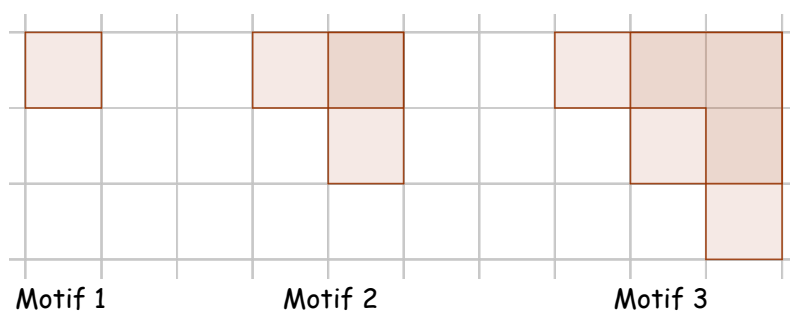
Exercice 8

$$u_2 = u_1 + u_0 = 2, \quad u_3 = u_2 + u_1 = 3, \quad u_4 = u_3 + u_2 = 5 \quad \text{et} \quad u_5 = u_4 + u_3 = 8$$

Remarque : C'est la suite de Fibonacci, c'est une suite célèbre !

Exercice 9

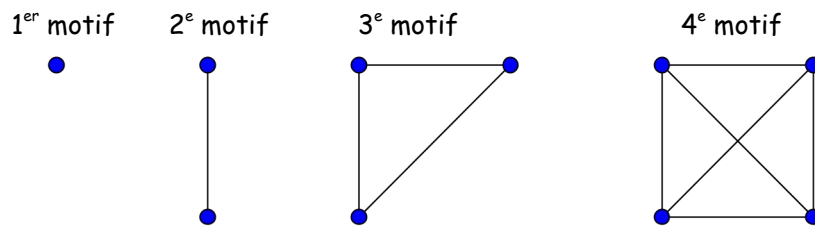
On réalise la construction de motifs ci-dessous.



1. $C_1 = 1$, $C_2 = 3$ et $C_3 = 6$.
2. $C_4 = C_3 + 4$
3. $C_{n+1} = C_n + n + 1$

Exercice 10

On considère la suite de motifs ci-dessous dans laquelle on rajoute un point à chaque étape. Pour tout entier naturel n non-nul, on appelle u_n le nombre de segments tracés sur le n -ième motif.



- $u_1=0$, $u_2=1$, $u_3=3$ et $u_4=6$.
- Sur le $(n+1)$ -ième motif il y a déjà les u_n segments et on rajoute un point qui doit être relié au n autres sommets ce qui donne n segment en plus, on a donc $u_{n+1}=u_n + n$

Exercice 11

- On a :

```
1 u=float(input("u0=?"))
2 N=int(input("N=?"))
3 for I in range(1,N+1):
4     u=2*u+5
5     print(u)
```

```
[GCC 6.3.1]
u0=?1
N=?11
12283.0
```

- En utilisant le programme Python, on obtient donc : $u_{11}=12283$

- Pour faire afficher tous les termes, Il faut le modifier comme ce qui suit :

```
1 u=float(input("u0=?"))
2 N=int(input("N=?"))
3 for I in range(1,N+1):
4     u=2*u+5
5     print(u)
6
7
8
9
10
```

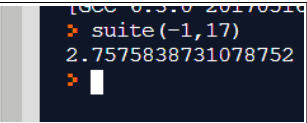
```
[GCC 6.3.1]
u0=?1
N=?11
7.0
19.0
43.0
91.0
187.0
379.0
763.0
1531.0
3067.0
6139.0
12283.0
```

Il faut donc faire rentrer le « print(u) » dans la boucle pour afficher tous les termes.

Exercice 12

1. En choisissant de nommer cette fonction « suite », on a :

```
1 def suite(u,N):
2     for I in range(1,N):
3         u=(u+3)/(3*u**2+1)
4     return(u)
```



2. On obtient $u_{17} \approx 2,75758$.

Exercice 13

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -3(n+1) + 1 - (-3n+1) = -3n - 3 + 1 + 3n - 1 = -3 < 0$
donc $u_{n+1} - u_n < 0 \Rightarrow u_{n+1} < u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = v_n + 2 - v_n = 2 > 0$ donc (v_n) est croissante.
- $w_0 = (-1)^0 = 1$, $w_1 = -1 < w_0$ et $w_2 = 1 > w_1$ donc (w_n) n'est pas monotone.

Exercice 14

- $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et $u_2 = 8$: la suite semble croissante.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x$.
 f est une fonction polynôme du 2nd degré telle que $a = 1 > 0$ donc f est décroissante sur $]-\infty; \alpha]$ et croissante sur $[\alpha; +\infty[$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1$ donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.
Ou bien
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + 2(n+1) - (n^2 + 2n) = n^2 + 2n + 1 + 2n + 2 - n^2 - 2n = 2n + 3 > 0$
donc (u_n) est strictement croissante.
- $v_0 = 1$, $v_1 = \frac{9}{4}$ et $v_2 = \frac{121}{16}$: la suite semble croissante.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \left(v_n + \frac{1}{2}\right)^2 - v_n = v_n^2 + v_n + \frac{1}{4} - v_n = v_n^2 + \frac{1}{4} > 0$ donc la suite (v_n) est croissante.
- $w_0 = 0$, $w_1 = 3$ et $w_2 = 9$: la suite semble croissante.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n = w_n + 3n - w_n = 3n$
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$ donc $3n \geq 0$ donc $w_{n+1} - w_n \geq 0$ donc $w_{n+1} \geq w_n$ donc la suite (w_n) est croissante.

Exercice 15

1. $u_0=1$, $u_1=0$, $u_2=3$ on a donc $u_0 > u_1$ et $u_1 < u_2$: La suite n'est pas monotone.
2. $v_0=2$, $v_1=6$ et $v_2=20$: la suite semble croissante.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5x^2-x+2$.

$$f(x)=5\left(x^2-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}\right)=5\left[\left(x-\frac{1}{10}\right)^2-\frac{1}{100}+\frac{2}{5}\right]=5\left(x-\frac{1}{10}\right)^2+\frac{39}{20} \text{ , de plus } a=5>0 \text{ donc}$$

f est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{10}; +\infty\right[$ donc la suite (v_n) est au moins strictement

croissante à partir du rang $n=1$.

Or $v_0=2$ et $v_1=6$ donc $v_0 < v_1$ ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq v_{n+1}$

donc la suite (v_n) est strictement croissante.

Ou bien

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1}-v_n=5(n+1)^2-(n+1)+2-(5n^2-n+2)=5(n^2+2n+1)-n-1+2-5n^2+n-2$$

$v_{n+1}-v_n=5n^2+10n+5-n-1+2-5n^2+n-2=10n+4>0$ donc la suite (v_n) est strictement croissante.

3. $w_1=-2$, $w_2=-3$ et $w_3=\frac{-13}{4}$: la suite semble décroissante.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ , } w_{n+1}-w_n=w_n-\frac{1}{n^2}-w_n=\frac{-1}{n^2}<0$$

donc la suite (w_n) est strictement décroissante.

Exercice 16

1. $u_1=\frac{-3}{1}+1=-3+1=-2$, $u_2=\frac{-3}{2}+1=\frac{-1}{2}$ et $u_3=\frac{-3}{3}+1=-1+1=0$

donc la suite semble croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_{n+1}-u_n=\left(\frac{-3}{n+1}+1\right)-\left(\frac{-3}{n}+1\right)=\frac{-3}{n+1}+\frac{3}{n}=\frac{-3n+3(n+1)}{n(n+1)}=\frac{-3n+3n+3}{n(n+1)}=\frac{3}{n(n+1)}$$

donc $u_{n+1}-u_n>0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

2. $v_0=3$, $v_1=\frac{3}{2}$ et $v_2=\frac{1}{2}$: la suite semble décroissante.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ , } v_{n+1}-v_n=\frac{v_n}{n+2}-v_n=\frac{v_n}{n+2}-\frac{(n+2)v_n}{n+2}=\frac{v_n(1-n-2)}{n+2}=\frac{-v_n(n+1)}{n+2}$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0$ et $\frac{n+1}{n+2} > 0$ donc $\frac{-v_n(n+1)}{n+2} < 0$ donc $v_{n+1}-v_n < 0$ la suite (v_n) est strictement décroissante.

3. $w_0=2$, $w_1=2-\sqrt{7} \approx -0,65$ et $w_2 \approx -2,49$: la suite semble décroissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1}-w_n=w_n-\sqrt{w_n^2+3}-w_n=-\sqrt{w_n^2+3}<0$ donc la suite (w_n) est strictement décroissante

Exercice 17

1. $100 \times \left(1 - \frac{5}{100}\right) + 10 = 95 + 10 = 105$. Elle aura 105 jeux en 2020.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{5}{100}\right) + 10 = 0,95u_n + 10$
3. 2022 correspond à $n=3$ et $u_3 = 114,2625$: elle aura environ 114 jeux.