

Exercice 1

1. $(x-3)(2x-1)$ n'est clairement pas une forme développée ni une forme canonique d'une fonction polynôme du second degré. Elle ressemble à une forme factorisée mais n'en n'est pas une car ne s'écrit pas précisément sous la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$
2. On dresse le tableau de signe du produit $(x-3)(2x-1)$

$$\begin{aligned} \text{Signe de } (x-3) \\ x-3=0 &\Leftrightarrow x=3 \\ x-3>0 &\Leftrightarrow x>3 \\ x-3<0 &\Leftrightarrow x<3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Signe de } (2x-1) \\ 2x-1=0 &\Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \\ 2x-1>0 &\Leftrightarrow x>\frac{1}{2} \\ 2x-1<0 &\Leftrightarrow x<\frac{1}{2} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$	
$x-3$	-	-	0	+	
$2x-1$	-	0	+	+	
$(x-3)(2x-1)$	+	0	-	0	+

Conclusion : $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in S = [\frac{1}{2}; 3]$

Exercice 2

1. $-(x+5)(x-1)$ est la forme factorisée de $f(x)$ car du type $a(x-x_1)(x-x_2)$
2. On dresse le tableau de signe du produit $-(x+5)(x-1)$

$$\begin{aligned} x+5=0 &\Leftrightarrow x=-5 & x-1=0 &\Leftrightarrow x=1 \\ x+5>0 &\Leftrightarrow x>-5 & x-1>0 &\Leftrightarrow x>1 \\ x+5<0 &\Leftrightarrow x<-5 & x-1<0 &\Leftrightarrow x<1 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$	
-1	-	-	-		
$x+5$	-	0	+	+	
$x-1$	-	-	0	+	
$-(x+5)(x-1)$	-	0	+	0	-

Conclusion : $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in S =]-5; 1[$

Exercice 3

1. f est une fonction polynôme du second degré s'annulant en 3 et en -5 donc 3 et -5 sont ses deux racines donc f est factorisable sous la forme $f(x) = a(x-3)(x+5)$.

Or $f(1) = -2$ donc $a \times (1-3)(1+5) = -2$ donc $-12a = -2$ donc $a = \frac{1}{6}$

Conclusion : $f(x) = \frac{1}{6}(x-3)(x+5) = \frac{1}{6}(x^2 + 5x - 3x - 15) = \frac{1}{6}(x^2 + 2x - 15) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{5}{2}$

2. f est une fonction polynôme du second degré s'annulant en $-\frac{1}{2}$ et en $\frac{1}{5}$ donc

$-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{5}$ sont ses deux racines donc f est factorisable sous la forme

$f(x) = a(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{5})$.

Or $f(-1) = 1$ donc $a \times (-1 + \frac{1}{2})(-1 - \frac{1}{5}) = 1$ donc $a \times (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{6}{5}) = 1$ donc $a \times \frac{3}{5} = 1$

donc $a = \frac{5}{3}$.

Conclusion : $f(x) = \frac{5}{3}(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{5})$.

Exercice 4

- Recherche de la forme canonique de $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ à l'aide des formules

$a = 2$; $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{4}$ $\beta = f(\alpha) = f(\frac{3}{4}) = 2 \times (\frac{3}{4})^2 - 3 \times (\frac{3}{4}) + 1 = 2 \times \frac{9}{16} - \frac{9}{4} + 1 = \frac{9}{8} - \frac{18}{8} + \frac{8}{8} = \frac{-1}{8}$

Conclusion : La forme canonique de $f(x)$ est $f(x) = 2(x - \frac{3}{4})^2 - \frac{1}{8}$.

- Recherche de la forme canonique de $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{5}x - 3$ à l'aide des formules

$a = \frac{1}{4}$ $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{\frac{1}{5}}{2 \times \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5} \times 2 = \frac{2}{5}$

$\beta = g(\alpha) = g(\frac{2}{5}) = \frac{1}{4} \times (\frac{2}{5})^2 - \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} - 3 = \frac{1}{4} \times \frac{4}{25} - \frac{2}{25} - 3 = \frac{1}{25} - \frac{2}{25} - 3 = \frac{-1}{25} - \frac{75}{25} = \frac{-76}{25}$

Conclusion : La forme canonique de $g(x)$ est $g(x) = \frac{1}{4}(x - \frac{2}{5})^2 - \frac{76}{25}$.

- Recherche de la forme canonique de $h(x) = -x^2 - 7x + 9$ à l'aide des formules

$a = -1$ $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{7}{-2} = \frac{-7}{2}$

$\beta = h(\alpha) = h(\frac{-7}{2}) = -(\frac{-7}{2})^2 - 7 \times (\frac{-7}{2}) + 9 = \frac{-49}{4} + \frac{49}{2} + 9 = \frac{-49}{4} + \frac{98}{4} + \frac{36}{4} = \frac{85}{4}$

Conclusion : La forme canonique de $h(x)$ est $h(x) = -(x - (\frac{-7}{2}))^2 + \frac{85}{4} = -(x + \frac{7}{2})^2 + \frac{85}{4}$.

- Recherche de la forme canonique de $i(x) = 3x^2 - 4$ à l'aide des formules

Conclusion : $i(x) = 3x^2 - 4 = 3(x-0)^2 - 4$ est déjà écrite sous sa forme canonique.

Exercice 5

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right) + 1 = 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] + 1 = 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right] + 1$$

$$f(x) = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} + \frac{8}{8} = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$$

$$g(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{5}x - 3 = \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{4}{5}x\right) - 3 = \frac{1}{4}\left[\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2\right] - 3 = \frac{1}{4}\left[\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{4}{25}\right] - 3$$

$$g(x) = \frac{1}{4}\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{1}{25} - \frac{75}{25} = \frac{1}{4}\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{76}{25}$$

$$h(x) = -x^2 - 7x + 9 = -(x^2 + 7x) + 9 = -\left[\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2\right] + 9$$

$$h(x) = -\left[\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}\right] + \frac{36}{4} = -\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{49}{4} + \frac{36}{4} = -\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{85}{4}$$

Exercice 6

- Résolution de l'équation $5x^2 - 6x + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 5 \times 2 = 36 - 40 = -4 < 0$ donc l'équation n'admet aucune solution réelle.

- Résolution de l'équation du second degré $\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{2} = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 4 \times \left(\frac{1}{6}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{16} + 1 = \frac{17}{16} > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{17}{16}}}{2 \times \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{(1 - \sqrt{17})}{4} \times 3 = \frac{3 - 3\sqrt{17}}{4}$$

et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{17}{16}}}{2 \times \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{(1 + \sqrt{17})}{4} \times 3 = \frac{3 + 3\sqrt{17}}{4}$$

- Résolution de l'équation du second degré $-x^2 + x - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = 1 - 4 = -3 < 0$ donc l'équation n'admet aucune solution réelle.

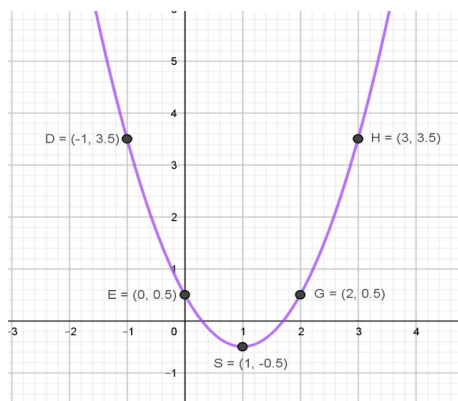
- Résolution de l'équation du second degré $16x^2 - 25 = 0$

$$16x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow (4x)^2 - 5^2 = 0 \Leftrightarrow (4x - 5)(4x + 5) = 0 \Leftrightarrow 4x - 5 = 0 \text{ ou } 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4} \text{ ou } x = -\frac{5}{4}$$

donc l'équation admet deux solutions : $\frac{5}{4}$ et $-\frac{5}{4}$

Exercice 7

- $f(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{2}$ est une fonction polynôme du second degré donc sa courbe représentative est une parabole (P).
- Le sommet de la parabole est le point S d'abscisse $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$ et d'ordonnée $\beta = f(\alpha) = f(1) = 1^2 - 2 \times 1 + \frac{1}{2} = 1 - 2 + \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ donc $S(1; -\frac{1}{2})$.
- La parabole (P) admet un axe de symétrie d'équation $x = \alpha = 1$



Tableur		
$f(x)$	G	/
	A	B
1	-4	24.5
2	-3	15.5
3	-2	8.5
4	-1	3.5
5	0	0.5
6	1	-0.5
7	2	0.5
8	3	3.5
9	4	8.5

Exercice 8

f est une fonction polynôme du second degré de sommet $S(1;3)$ donc sa forme canonique est du type $f(x) = a(x-1)^2 + 3$ et sa représentation graphique est une parabole (P).
 $A(-1; -5)$ appartient à la parabole (P) donc $f(-1) = -5$.

$$f(-1) = -5 \Leftrightarrow a(-1-1)^2 + 3 = -5 \Leftrightarrow a \times (-2)^2 = -2 \Leftrightarrow 4a + 3 = -5 \Leftrightarrow a = \frac{-8}{4} = -2$$

Conclusion :

- $f(x) = -2(x-1)^2 + 3$ est la forme canonique de f .
- $f(x) = -2(x-1)^2 + 3 = -2(x^2 - 2x + 1) + 3 = -2x^2 + 4x - 2 + 3 = -2x^2 + 4x + 1$ est la forme développée f .

Exercice 9

L'équation est définie pour les réels x tels que $x^2 + 5x - 6 \neq 0$

Résolution de $x^2 + 5x - 6 = 0$

On déduit que l'équation est définie pour $x \neq 1$ et $x \neq -6$.

On déduit que $\frac{x^2 + 19x + 18}{x^2 + 5x - 6} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 19x + 18 = 0$ et $x \neq 1$ et $x \neq -6$

Résolution de $x^2 + 19x + 18 = 0$

$x_1 = -1$ est une solution évidente donc la deuxième solution x_2 vérifie $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ donc $-1 \times x_2 = 18$ donc $x_2 = -18$

Conclusion : $-1 \neq 1$ et $-1 \neq -6$ et $-18 \neq 1$ et $-18 \neq -6$ donc l'équation admet deux solutions : -1 et -18

Exercice 10

$x_1 = 1$ est une solution évidente donc la deuxième solution x_2 vérifie $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ donc

$1 \times x_2 = -3$ donc $x_2 = -3$.

A la calculatrice, on vérifie bien que 1 et -3 sont les deux solutions de l'équation.

Exercice 11

1. $f(x) = x^2 + 3x - 8m$ admet une seule racine si et seulement si $\Delta = 0$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 3^2 - 4 \times 1 \times (-8m) = 0 \Leftrightarrow 9 + 32m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{32}$$

2. Si $\Delta = 0$ alors f admet une racine double $x_0 = \frac{-b}{2a} = -\frac{3}{2}$.

Exercice 12

$f(x) = x^2 + 7mx - 9$ n'admet aucune racine si et seulement si $\Delta < 0$.

$\Delta = (7m)^2 - 4 \times 1 \times (-9) = 49m^2 + 36 > 0$ donc f admet toujours deux racines.

Exercice 13

1.

```
from math import*
def secdegré1(a,b,c):
    d=b**2- 4*a*c
    if d<0:
        print("pas de racine")
    else:
        print("une ou deux racines")
```

2.

```

from math import *
def secdegré1(a,b,c):
    d=b**2- 4*a*c
    if d<0:
        print("pas de racine")
    elif d==0:
        print("une seule racine")
    else:
        print("deux racines")

```

Exercice 14

- Résolution de $x - \frac{4}{x-2} = 6$

$x - \frac{4}{x-2} = 6$ est définie pour les réels x tels que $x-2 \neq 0$ c'est à dire $x \neq 2$

$$x - \frac{4}{x-2} = 6 \Leftrightarrow \frac{x(x-2) - 4 - 6(x-2)}{(x-2)} = 0 \text{ et } x \neq 2 \Leftrightarrow x(x-2) - 4 - 6(x-2) = 0 \text{ et } x \neq 2$$

$$x - \frac{4}{x-2} = 6 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 - 6x + 12 = 0 \text{ et } x \neq 2 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 8 = 0 \text{ et } x \neq 2$$

- Résolution de $x^2 - 8x + 8 = 0$ dans $\mathbb{R}$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 64 - 32 = 32 > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 - \sqrt{32}}{2} = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{2} = 4 - 2\sqrt{2} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 + \sqrt{32}}{2} = \frac{8 + 4\sqrt{2}}{2} = 4 + 2\sqrt{2}$$

Conclusion : $x_1 \neq 2$ et $x_2 \neq 2$ donc l'équation admet pour solutions $4 - 2\sqrt{2}$ et $4 + 2\sqrt{2}$

- Résolution de $\frac{x}{11} + \frac{23}{x+5} = \frac{41}{11}$

$\frac{x}{11} + \frac{23}{x+5} = \frac{41}{11}$ est définie pour les réels x tels que $x+5 \neq 0$ c'est à dire $x \neq -5$

$$\frac{x}{11} + \frac{23}{x+5} = \frac{41}{11} \Leftrightarrow \frac{x(x+5) + 23 \times 11 - 41(x+5)}{11(x+5)} = 0 \text{ et } x \neq -5$$

$$\frac{x}{11} + \frac{23}{x+5} = \frac{41}{11} \Leftrightarrow \frac{x^2 + 5x + 253 - 41x - 205}{11(x+5)} = 0 \text{ et } x \neq -5$$

$$\frac{x}{11} + \frac{23}{x+5} = \frac{41}{11} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 36x + 48}{11(x+5)} = 0 \text{ et } x \neq -5$$

$$\frac{x}{11} + \frac{23}{x+5} = \frac{41}{11} \Leftrightarrow x^2 - 36x + 48 = 0 \text{ et } x \neq -5$$

- Résolution de $x^2 - 36x + 48 = 0$ dans $\mathbb{R}$
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-36)^2 - 4 \times 1 \times 48 = 1104 > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :
 $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{36 - \sqrt{1104}}{2} = \frac{36 - 4\sqrt{69}}{2} = 18 - 2\sqrt{69}$ et
 $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{36 + \sqrt{1104}}{2} = \frac{36 + 4\sqrt{69}}{2} = 18 + 2\sqrt{69}$

Conclusion : $x_1 \neq -5$ et $x_2 \neq -5$ donc l'équation admet pour solutions $18 - 2\sqrt{69}$ et $18 + \sqrt{69}$

- Résolution de $(x^2 - x + 1)(x^2 + x - 1) = 0$
 $(x^2 - x + 1)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x + 1) = 0$ ou $(x^2 + x - 1) = 0$

- Résolution de $x^2 - x + 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc l'équation n'admet aucune solution

- Résolution de $x^2 + x - 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$
 $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :
 $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

Conclusion : L'équation admet pour solutions $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Exercice 15

$M(x; y) \in (Ox)$ donc $y = 0$ donc $M(x; 0)$.

Dans le repère orthonormé, on a :

$$AM^2 = (x - (-2))^2 + (0 - (-5))^2 = (x + 2)^2 + 25$$

$$BM^2 = (x - 2)^2 + (0 - 3)^2 = (x - 2)^2 + 9$$

$$AB^2 = (2 - (-2))^2 + (3 - (-5))^2 = 4^2 + 8^2 = 16 + 64 = 80$$

$$ABM \text{ est rectangle en } M \Leftrightarrow AB^2 = AM^2 + BM^2$$

$$ABM \text{ est rectangle en } M \Leftrightarrow 80 = (x + 2)^2 + 25 + (x - 2)^2 + 9$$

$$ABM \text{ est rectangle en } M \Leftrightarrow 80 = x^2 + 4x + 4 + 25 + x^2 - 4x + 4 + 9 = 2x^2 + 42$$

$$ABM \text{ est rectangle en } M \Leftrightarrow 2x^2 = 80 - 42 = 38 \Leftrightarrow x^2 = 19 \Leftrightarrow x = \sqrt{19} \text{ ou } x = -\sqrt{19}$$

$$ABM \text{ est rectangle en } M \Leftrightarrow M(-\sqrt{19}; 0) \text{ et } M(\sqrt{19}; 0)$$

Conclusion : Il existe deux points $M_1(-\sqrt{19}; 0)$ et $M_2(\sqrt{19}; 0)$ sur l'axe des abscisses pour lesquels le triangle ABM est rectangle en M .

Exercice 16

Soit $n \in \mathbb{N}$ le nombre total de participants.

Si chaque participant serrait la main de chaque autre participant, il serrerait $(n-1)$ mains.

Il y aurait donc au total $n(n-1)$ poignées de mains.

On aurait alors l'équation $n(n-1) = 2 \times 325 = 650 \Leftrightarrow n^2 - n - 650 = 0$

Résolution de l'équation $x^2 - x - 650 = 0$ dans $\mathbb{R}$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-650) = 1 + 2600 = 2601 = 51^2 > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 51}{2} = -25 \notin \mathbb{N} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 51}{2} = 26 \in \mathbb{N}.$$

On déduit que le nombre total de participants à la remise des diplômes est égal à 26.

Exercice 17

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ la fonction polynôme du second degré dont la parabole C_f passe par les points $A(0;1)$; $B(1;-2)$ et $C(5;6)$. On obtient alors le système :

$$\begin{cases} a \times 0^2 + b \times 0 + c = 1 \\ a \times 1^2 + b \times 1 + c = -2 \\ a \times 5^2 + b \times 5 + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a + b + 1 = -2 \\ 25a + 5b + 1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = -3 - a \\ 25a + 5(-3 - a) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = -3 - a \\ 25a - 15 - 5a = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = -3 - a \\ 20a = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = -3 - a \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = -3 - 1 = -4 \\ a = 1 \end{cases}$$

Conclusion : $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

Exercice 18

$$f(x) = 14x - 8x^2 = 2x(7 - 4x) = 2x \times (-4) \times \left(x - \frac{7}{4}\right) = -8x \left(x - \frac{7}{4}\right)$$

$$g(x) = (5x+1)^2 - (3x-1)^2 = ((5x+1) - (3x-1))((5x+1) + (3x-1)) = (2x+2)(8x) \\ g(x) = 2 \times (x+1) \times 8x = 16x(x+1)$$

$$h(x) = 4x^2 - 7x + 1$$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 49 - 16 = 33 > 0$ donc h admet deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 - \sqrt{33}}{8} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 + \sqrt{33}}{8}$$

La forme factorisée de h est donc $h(x) = 4 \left(x - \frac{7 - \sqrt{33}}{8}\right) \left(x - \frac{7 + \sqrt{33}}{8}\right)$

Exercice 19

Soit R le rayon du disque. On a donc $R = \frac{x}{2\pi}$

L'aire du disque vaut $A = \pi \times R^2 = \pi \times \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \pi \times \frac{x^2}{4\pi^2} = \frac{x^2}{4\pi}$

Le côté du carré vaut $c = \frac{(10-x)}{4}$ et son aire vaut $c^2 = \left(\frac{(10-x)}{4}\right)^2 = \frac{(10-x)^2}{16}$

On déduit que la somme de aires est égale à $S = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(10-x)^2}{16} = \frac{4x^2}{16\pi} + \frac{\pi(10-x)^2}{16\pi}$

$$S = \frac{4x^2 + \pi(100 - 20x + x^2)}{16\pi} = \frac{4x^2 + 100\pi - 20\pi x + \pi x^2}{16\pi} = \frac{(4 + \pi)x^2 - 20\pi x + 100\pi}{16\pi}$$

S est minimale lorsque $f(x) = (4 + \pi)x^2 - 20\pi x + 100\pi$ est minimale car $16\pi > 0$

Or $(4 + \pi) > 0$ donc f admet un minimum en $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{20\pi}{2(4 + \pi)} = \frac{10\pi}{(4 + \pi)}$.

On déduit alors que $R = \frac{\frac{10\pi}{(4 + \pi)}}{2\pi} = \frac{10\pi}{(4 + \pi)} \times \frac{1}{2\pi} = \frac{5}{(4 + \pi)} \approx 0,7 \text{ dm} = 7 \text{ cm}$

et $c = \frac{(10 - \frac{10\pi}{(4 + \pi)})}{4} = \frac{(40 + 10\pi - 10\pi)}{4 + \pi} = \frac{40}{4 + \pi} \times \frac{1}{4} = \frac{10}{4 + \pi} \approx 1,4 \text{ dm} = 14 \text{ cm}$

Remarque : la somme des aires est minimale lorsque le côté du carré est égal au diamètre du disque.

Exercice 20

1. Avant de quitter le bras du lanceur, le javelot est situé à la hauteur $h(0) = 2 \text{ m}$ du sol.

2. Le javelot retombe au sol lorsque $h(t) = 0 \Leftrightarrow -5t^2 + 17t + 2 = 0$

Résolution de l'équation $-5t^2 + 17t + 2 = 0$ dans $\mathbb{R}$

$\Delta = 17^2 - 4 \times (-5) \times 2 = 289 + 40 = 329 > 0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-17 - \sqrt{329}}{-10} = \frac{17 + \sqrt{329}}{10} \text{ et } t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-17 + \sqrt{329}}{-10} = \frac{17 - \sqrt{329}}{10}$$

Or $t_1 \approx 3,51$ et $t_2 \approx -0,11$ donc seule la solution $t_1 = \frac{17 + \sqrt{329}}{10} \approx 3,51$ secondes convient.

3. La hauteur $h(t) = -5t^2 + 17t + 2$ est une fonction du second degré avec $a = -5 < 0$ donc

h admet un maximum en $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-17}{-10} = \frac{17}{10} = 1,7$ et ce maximum vaut

$$\beta = h(1,7) = 16,45 \text{ m}$$

4. On cherche tous les réels $t \geq 0$ tels que $h(t) > 12$

$$h(t) > 12 \Leftrightarrow -5t^2 + 17t + 2 > 12 \Leftrightarrow -5t^2 + 17t - 10 > 0$$

Recherche des racines de $g(t) = -5t^2 + 17t - 10$ dans $\mathbb{R}$

$$\Delta = 17^2 - 4 \times (-5) \times (-10) = 289 - 200 = 89 > 0 \text{ donc } g \text{ admet deux racines distinctes}$$

$$t_3 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-17 - \sqrt{89}}{-10} = \frac{17 + \sqrt{89}}{10} \text{ et } t_4 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-17 + \sqrt{89}}{-10} = \frac{17 - \sqrt{89}}{10}$$

Or $t_3 \approx 2,64$ et $t_4 \approx 0,76 < 0$ et $a = -5 < 0$ donc

Conclusion : Le javelot reste au-dessus des 12m pendant environ $2,64 - 0,76 = 1,88s$

Exercice 21

1. Avant l'injection de l'antibiotique, l'échantillon contenait $f(0) = 5$ milliers de bactéries soit 5000 bactéries.
2. $f(t) = 0,05t^2 - t + 5$ est une fonction polynôme du second degré avec $a = 0,05 > 0$ donc admet un maximum en $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{0,1} = 10$ donc f est décroissante sur $[0; 9]$ donc le nombre de bactéries décroît au fur et à mesure du traitement.
3. Au bout de 9h, le nombre de bactéries est égal à $f(9) = 0,05 \times 9^2 - 9 + 5 = 0,05$ milliers soit 50 bactéries.

4. Au bout de 5h de traitement, le nombre de bactéries dans l'échantillon est égal à $f(5) = 0,05 \times 5^2 - 5 + 5 = 1,25$ millier soit $1250 < 1800$ donc l'antibiotique est efficace.

On cherche $t \in [0; 9]$ tel que $f(t) < 1,8 \Leftrightarrow 0,05t^2 - t + 5 < 1,8 \Leftrightarrow 0,05t^2 - t + 3,2 < 0$

Étude du signe de $g(t) = 0,05t^2 - t + 3,2$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 0,05 \times 3,2 = 0,36 = 0,6^2 > 0 \text{ donc } g \text{ admet deux racines distinctes}$$

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 0,6}{0,1} = \frac{0,4}{0,1} = 4 \text{ et } t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 0,6}{0,1} = \frac{1,6}{0,1} = 16$$

Or $a = 0,05 > 0$ donc $g(t) < 0$ dès que $t > 4$ avec $t \in [0; 9]$

Conclusion : le seuil des 1800 bactéries est atteint au out de 4h par l'antibiotique.

Exercice 22

$$(n^2 - 7n + 11)^{(n^2 - 3n + 2)} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (n^2 - 7n + 11) = 1 \\ \text{ou } (n^2 - 3n + 2) = 0 \\ \text{ou } (n^2 - 7n + 11) = -1 \text{ et } (n^2 - 3n + 2) \text{ pair} \end{cases}$$

1^{er} cas : Résolution de $n^2 - 7n + 11 = 1$

$$n^2 - 7n + 11 = 1 \Leftrightarrow n^2 - 7n + 10 = 0$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 49 - 40 = 9 = 3^2 > 0 \text{ donc l'équation } n^2 - 7n + 10 = 0 \text{ admet deux}$$

$$\text{solutions distinctes } n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 - 3}{2} = 2 \text{ et } n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 + 3}{2} = 5$$

Conclusion 1 : $n^2 - 7n + 11 = 1 \Leftrightarrow n = 2$ ou $n = 5$

2^{ème} cas : Résolution de $n^2 - 3n + 2 = 0$

$n_1=1$ est une racine évidente donc la deuxième racine n_2 vérifie $n_1 \times n_2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow n_2=2$

Conclusion 2 : $n^2-3n+2=0 \Leftrightarrow n=1$ ou $n=2$

3^{ème} cas : Résolution de $n^2-7n+11=-1$

$$n^2-7n+11=-1 \Leftrightarrow n^2-7n+12=0$$

$\Delta=(-7)^2-4 \times 1 \times 12=49-48=1>0$ donc l'équation $n^2-7n+12=0$ admet deux solutions

$$\text{distinctes } n_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-1}{2} = 3 \text{ et } n_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+1}{2} = 4$$

Conclusion 3 : $n^2-7n+11=-1 \Leftrightarrow n=3$ ou $n=4$.

Pour $n=3$ on a $n^2-3n+2=3^2-3 \times 3+2=2$. 2 est bien pair donc $n=3$ convient.

Pour $n=4$ on a $n^2-3n+2=4^2-3 \times 4+2=16-12+2=6$. 6 est bien pair donc $n=4$ convient aussi.

Conclusion : les entiers qui conviennent sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 5.

Exercice 23

1. Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2-3x-180=0$

$\Delta=(-3)^2-4 \times 1 \times (-180)=9+720=729=27^2>0$ donc l'équation $x^2-3x-180=0$ admet

$$\text{deux solutions distinctes } x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-27}{2} = -12 \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+27}{2} = 15$$

2. En posant $X=x^2$, l'équation $x^4-3x^2-180=0$ est équivalente à $X^2-3X-180=0$

D'après le 1. on déduit que $X^2-3X-180=0$ admet une seule solution $X=15$ (car l'autre solution est strictement négative donc ne peut pas convenir).

$$X=15 \Leftrightarrow x^2=15 \Leftrightarrow x=\sqrt{15} \text{ ou } -\sqrt{15}$$

Conclusion : L'équation $x^2-3x-180=0$ admet deux solutions réelles $x=\sqrt{15}$ ou $-\sqrt{15}$.

Exercice 24

En posant $X=x^2$, l'équation $2x^4+x^2-6=0$ est équivalente à $2X^2+X-6=0$

• Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $2X^2+X-6=0$

$\Delta=1^2-4 \times 2 \times (-6)=1+48=49=7^2>0$ donc l'équation $2X^2+X-6=0$ admet deux solutions

$$\text{distinctes } X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-7}{4} = -2 \text{ et } X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+7}{4} = \frac{3}{2}$$

Conclusion 1 : L'équation $2X^2+X-6=0$ admet deux solutions réelles -2 et $\frac{3}{2}$

Remarque : on pouvait aussi remarquer que -2 est une racine évidente de $2X^2+X-6=0$

• Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $2x^4+x^2-6=0$

$$2x^4+x^2-6=0 \Leftrightarrow 2X^2+X-6=0 \text{ avec } X=x^2 \Leftrightarrow X=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ou } x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Conclusion : L'équation $2x^4+x^2-6=0$ admet deux solutions réelles $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ ou $-\sqrt{\frac{3}{2}}$.