

**Exercice 1**

- 1 Soient  $n$  et  $n'$  deux nombres pairs alors il existe deux entiers  $k$  et  $k'$  et tels que  $n=2k$  et  $n'=2k'$ . On a alors  $n+n'=2k+2k'=2(k+k')$ . Or  $k+k'$  est un entier donc  $n+n'$  est un multiple de 2 donc pair.
- 2 Soient  $n$  et  $n'$  deux nombres impairs alors il existe deux entiers  $k$  et  $k'$  et tels que  $n=2k+1$  et  $n'=2k'+1$ . On a alors  $n \times n' = (2k+1) \times (2k'+1) = 4kk' + 2k + 2k' + 1 = 2(2kk' + k + k') + 1$ . Or  $2kk' + k + k'$  est un entier donc  $n \times n' = 2k'' + 1$  avec  $k'' = 2kk' + k + k'$  donc impair.
- 3 Par des raisonnements analogues, on obtient les tableaux suivants

| +      | Pair   | Impair |
|--------|--------|--------|
| Pair   | Pair   | Impair |
| Impair | Impair | Pair   |
|        |        |        |

| x      | Pair | Impair |
|--------|------|--------|
| Pair   | Pair | Pair   |
| Impair | Pair | Impair |

**Exercice 2**

- 1  $3+5 = 8$  est divisible par 4.
- 2 Deux entiers impairs consécutifs peuvent s'écrire  $n=2k-1$  et  $n'=2k+1$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . On a alors  $n+n' = (2k-1) + (2k+1) = 4k$ , donc  $n+n'$  est bien divisible par 4.

**Exercice 3**

Quatre entiers consécutifs peuvent s'écrire  $n-1; n; n+1$  et  $n+2$ .

La somme de leur carré est alors

$$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = n^2 - 2n + 1 + n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = 4n^2 + 4n + 6 = 2(2n^2 + 2n + 3)$$

Or  $(2n^2 + 2n + 3)$  est un entier donc  $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2$  est divisible par 2.

**Exercice 4**

1.  $11|n+3 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n+3 = 11k \Leftrightarrow n = 11k - 3$   
Or,  $n \in \mathbb{N}$  donc  $n \geq 0$  donc  $S = \{ 11k - 3, k \in \mathbb{N}^* \}$ .
2.  $6|3n-9 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 3n-9 = 6k \Leftrightarrow 3n = 6k + 9 \Leftrightarrow n = 2k + 3$   
Or,  $n \in \mathbb{N}$  donc  $n \geq 0$  donc  $S = \{ 11k - 3, k \in \mathbb{Z}, k \geq -1 \}$ .

**Exercice 5**

1.  $n|n+6$  et  $n|n$  donc  $n|(n+6)-n$  donc  $n|6$ .

Or les diviseurs positifs de 6 sont : 1 ; 2 ; 3 et 6 donc  $n \in \{1; 2; 3; 6\}$ .

Réciproquement,

si  $n=1$  alors  $n+6 = 7$  et 1 divise bien 7

si  $n=2$  alors  $n+6 = 8$  et 2 divise bien 8

si  $n=3$  alors  $n+6 = 9$  et 3 divise bien 9

si  $n=6$  alors  $n+6 = 12$  et 6 divise bien 12

Conclusion :  $S = \{1; 2; 3; 6\}$

2.  $(n-1)|(n+11)$  et  $(n-1)|(n-1)$  donc  $(n-1)|(n+11)-(n-1)$  donc  $(n-1)|12$ .

Or les diviseurs de 12 sont : -12 ; -6 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 et 12

donc  $(n-1) \in \{-12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12\}$

donc  $n \in \{-11; -5; -3; -2; -1; 0; 2; 3; 4; 5; 7; 13\}$ .

Or  $n \in \mathbb{N}$  donc  $n \in \{0; 2; 3; 4; 5; 7; 13\}$ .

Réciproquement,

si  $n=0$  alors  $n-1=-1$  et  $n+11=11$  et -1 divise bien 11

si  $n=2$  alors  $n-1=1$  et  $n+11=13$  et 1 divise bien 13

si  $n=3$  alors  $n-1=2$  et  $n+11=14$  et 2 divise bien 14

si  $n=4$  alors  $n-1=3$  et  $n+11=15$  et 3 divise bien 15

si  $n=5$  alors  $n-1=4$  et  $n+11=16$  et 4 divise bien 16

si  $n=7$  alors  $n-1=6$  et  $n+11=18$  et 6 divise bien 18

si  $n=13$  alors  $n-1=12$  et  $n+11=24$  et 12 divise bien 24

Conclusion :  $S = \{0; 2; 3; 4; 5; 7; 13\}$

3.  $(n-3)|(n+2)$  et  $(n-3)|(n-3)$  donc  $(n-3)|(n+2)-(n-3)$  donc  $(n-3)|5$ .

Or les diviseurs de 5 sont : -5 ; -1 ; 1 et 5

donc  $(n-3) \in \{-5; -1; 1; 5\}$

donc  $n \in \{-2; 2; 4; 8\}$ .

Or  $n \in \mathbb{N}$  donc  $n \in \{2; 4; 8\}$ .

Réciproquement,

si  $n=2$  alors  $n-3=-1$  et  $n+2=4$  et -1 divise bien 4

si  $n=4$  alors  $n-3=1$  et  $n+2=6$  et 1 divise bien 6

si  $n=8$  alors  $n-3=5$  et  $n+2=10$  et 5 divise bien 10

Conclusion :  $S = \{2; 4; 8\}$

**Exercice 6**

Soit  $(x; y) \in \mathbb{N}^2$ . On a  $x^2 - 4y^2 = (x-2y)(x+2y)$ . Ainsi :

$x^2 - 4y^2 = 36 \Leftrightarrow (x-2y)(x+2y) = 36$ . Or  $(x; y) \in \mathbb{N}^2$  donc  $(x+2y) \geq 0$ .  
 $(x-2y)(x+2y) = 36 \geq 0$  et  $(x+2y) \geq 0 \Rightarrow (x-2y) \geq 0$   
 $(x-2y)(x+2y) = 36$  et  $(x+2y) \geq 0$  et  $(x-2y) \geq 0$  donc  $(x+2y)$  et  $(x-2y)$  sont deux diviseurs positifs de 36 dont le produit est égal à 36 avec  $(x-2y) \leq (x+2y)$ .

Or les diviseurs positifs de 36 sont : 1;2;3;4;6;9;12 et 36.

Les couples  $(x; y) \in \mathbb{N}^2$  tels que  $(x-2y)(x+2y) = 36$  avec  $(x-2y) \leq (x+2y)$  vérifient donc

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} x-2y=1 \\ x+2y=36 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x-2y=2 \\ x+2y=18 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x-2y=3 \\ x+2y=12 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x-2y=4 \\ x+2y=9 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x-2y=6 \\ x+2y=6 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x=\frac{37}{2} \notin \mathbb{N} \\ y=\frac{35}{4} \notin \mathbb{N} \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x=10 \\ y=4 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x=\frac{15}{2} \notin \mathbb{N} \\ y=\frac{9}{4} \notin \mathbb{N} \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x=\frac{13}{2} \notin \mathbb{N} \\ y=\frac{5}{4} \notin \mathbb{N} \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x=6 \\ y=0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Les couples  $(x; y) \in \mathbb{N}^2$  solutions possibles sont donc (10;4) et (6;0).

Réciproquement,

$$10^2 - 4 \times 4^2 = 100 - 64 = 36 \text{ donc le couple (10;4) est solution}$$

$$6^2 - 4 \times 0^2 = 36 \text{ donc le couple (6;0) est solution}$$

Conclusion :  $S = \{(10;4); (6;0)\}$

**Exercice 7**

On cherche tous les couples  $(x; y) \in \mathbb{N}^2$  tels que  $x^2 - 3^2 = y^2$ .

$$x^2 - 3^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 3^2 = 9 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 9$$

$$(x-y)(x+y) = 9 \text{ avec } (x; y) \in \mathbb{N}^2 \Rightarrow (x+y) \geq 0 \text{ et } (x-y) \geq 0$$

On déduit que  $(x-y)$  et  $(x+y)$  sont deux diviseurs positifs de 9 dont le produit est 9 avec  $(x-y) \leq (x+y)$ .

Or les diviseurs positifs de 9 sont 1;3 et 9. On déduit que les couples  $(x; y) \in \mathbb{N}^2$  tels que  $(x-y) \mid 9$  et  $(x+y) \mid 9$  avec  $0 \leq (x-y) \leq (x+y)$  vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{l} x-y=1 \\ x+y=9 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x-y=3 \\ x+y=3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=5 \\ y=4 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x=3 \\ y=0 \end{array} \right.$$

Réciproquement,

$$5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 = 4^2 \text{ donc le couple (5;4) est bien une solution.}$$

$$3^2 - 3^2 = 0 = 0^2 \text{ donc le couple (3;0) est bien une solution.}$$

Conclusion :  $S = \{(5;4); (3;0)\}$

**Exercice 8**

On vérifie que  $\forall n \in \mathbb{N}, n+4 \neq 0$  donc  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned}
 1. \quad f(n) &= an+b+\frac{c}{n+4} \Leftrightarrow \frac{3n^2+2n-1}{n+4} = \frac{an(n+4)+b(n+4)+c}{n+4} = \frac{an^2+4an+bn+4b+c}{n+4} \\
 f(n) &= an+b+\frac{c}{n+4} \Leftrightarrow \frac{3n^2+2n-1}{n+4} = an+b+\frac{c}{n+4} \Leftrightarrow 3n^2+2n-1 = an^2+(4a+b)n+4b+c \\
 f(n) &= an+b+\frac{c}{n+4} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ 4a+b=2 \\ 4b+c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2-4 \times 3 = -10 \\ c=-1-4 \times (-10) = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-10 \\ c=39 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = 3n - 10 + \frac{39}{n+4}$

$$2. \quad f(n) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3n - 10 + \frac{39}{n+4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{39}{n+4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (n+4) \mid 39$$

Or les diviseurs de 39 sont -39; -13; -3; -1; 1; 3; 13 et 39  
 donc  $n+4 \in \{-39; -13; -3; -1; 1; 3; 13; 39\}$   
 donc  $n \in \{-43; -17; -7; -5; -3; -1; 9; 35\}$

Or,  $n$  est un entier naturel donc  $n \in \{9; 35\}$

Réciproquement,

si  $n=9$  alors  $f(9) = 3 \times 9 - 10 + \frac{39}{13} = 27 - 10 + 3 = 20 \in \mathbb{Z}$

si  $n=35$  alors  $f(35) = 3 \times 35 - 10 + \frac{39}{39} = 105 - 10 + 1 = 96 \in \mathbb{Z}$

Conclusion :  $S = \{9; 35\}$

**Exercice 9**

1.  $24 = 1 \times 24 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6$  donc les diviseurs de 24 sont 1;2;3;4;6;8;12 et 24.

2. Soit  $m \in \mathbb{N}$ .

$$n^2 - 24 = m^2 \Leftrightarrow n^2 - m^2 = 24 \Leftrightarrow (n-m)(n+m) = 24$$

Or,  $(n; m) \in \mathbb{N}^2 \Rightarrow n+m \geq 0$ .

$$(n-m)(n+m) = 24 \text{ et } (n+m) \geq 0 \Rightarrow (n-m) \geq 0$$

On déduit que  $n-m \mid 24$  et  $n+m \mid 24$  avec  $0 \leq (n-m) \leq (n+m)$  d'où

$$\begin{cases} n-m=1 \\ n+m=24 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} n-m=2 \\ n+m=12 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} n-m=3 \\ n+m=8 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} n-m=4 \\ n+m=6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = \frac{25}{2} \notin \mathbb{N} \\ n+m = \frac{23}{2} \notin \mathbb{N} \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} n=7 \\ m=5 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} n = \frac{11}{2} \notin \mathbb{N} \\ m = \frac{5}{2} \notin \mathbb{N} \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} n=5 \\ m=1 \end{array} \right.$$

Réciproquement, on vérifie que  $7^2 - 24 = 49 - 24 = 25 = 5^2$  et  $5^2 - 24 = 25 - 24 = 1 = 1^2$

Conclusion :  $S = \{7; 5\}$

### Exercice 10

1.  $P(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a \neq 0$  et  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$  admet exactement deux solutions réelles distinctes si et seulement si  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ .

2. On suppose que  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$  et on note  $x_1 \in \mathbb{Z}$  l'une des deux racines réelles.

On a  $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$  donc  $a \times x_1 \times x_2 = c$ . Or,  $a \in \mathbb{Z}^*$ ,  $x_1 \in \mathbb{Z}$  et  $c \in \mathbb{Z}$  donc  $x_2 \in \mathbb{Z}$  et  $x_1 | c$ .

3.  $\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 13 = 49 - 12 = 37 > 0$  donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes.

Raisonnons par l'absurde et supposons que l'une des solutions, par exemple  $x_1$  soit entière.

Alors, d'après le 2.,  $x_1 | c = 3$  donc  $x_1 = 1$  ou  $x_1 = 3$  ou  $x_1 = -1$  ou  $x_1 = -3$ .

Or,

$$1^2 - 7 \times 1 + 3 - 3 \neq 0 \text{ et } (-1)^2 - 7 \times (-1) + 3 = 11 \neq 0$$

$$3^2 - 7 \times 3 + 3 = -9 \neq 0 \text{ et } (-3)^2 - 7 \times (-3) + 3 = 33 \neq 0$$

donc l'équation n'admet pas de solutions entières.

4. Si  $x_1 = 2$  est une racine de  $P(x) = ax^2 + bx + 6$  alors l'autre racine  $x_2$  vérifie  $x_1 \times x_2 = \frac{6}{a}$  donc  $a \times 2 \times x_2 = 6$  avec  $a \in \mathbb{Z}^*$ ,  $2 \in \mathbb{N}$  et  $x_2 \in \mathbb{Z}$  donc  $a x_2 = 3$  avec  $a \in \mathbb{Z}^*$  et  $x_2 \in \mathbb{Z}$  donc

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = -1 \\ a = -3 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 1 \\ a = 3 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x_2 = -3 \\ a = -1 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 3 \\ a = 1 \end{array} \right.$$

Or,  $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$  donc  $-b = a(x_1 + x_2)$  donc  $b = -a(x_1 + x_2)$

1<sup>er</sup> cas :  $x_1 = 2$  et  $x_2 = -1$  et  $a = -3$  donc  $b = 3 \times 1 = 3$  et  $P_1(x) = -3x^2 + 3x + 6$

2<sup>ème</sup> cas :  $x_1 = 2$  et  $x_2 = 1$  et  $a = 3$  donc  $b = (-3) \times 3 = -9$  et  $P_2(x) = 3x^2 - 9x + 6$

3<sup>ème</sup> cas :  $x_1 = 2$  et  $x_2 = -3$  et  $a = -1$  donc  $b = 1 \times (-1) = -1$  et  $P_3(x) = -x^2 - x + 6$

4<sup>ème</sup> cas :  $x_1 = 2$  et  $x_2 = 3$  et  $a = 1$  donc  $b = (-1) \times 5 = -5$  et  $P_4(x) = x^2 - 5x + 6$

Réciproquement :

$$P_1(x) = -3x^2 + 3x + 6 = -3(x^2 - x - 2) = -3(x+1)(x-2)$$

$$P_2(x) = 3x^2 - 9x + 6 = 3(x^2 - 3x + 2) = 3(x-1)(x-2)$$

$$P_3(x) = -x^2 - x + 6 = -(x^2 + x - 6) = -(x+3)(x-2)$$

$$P_4(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$$

Conclusion : Les seuls polynômes du second degré de la forme  $P(x) = ax^2 + bx + 6$  avec  $a \neq 0$  et  $b \in \mathbb{Z}$  admettant deux racines réelles distinctes dont l'une est 2 sont :

$$P_1(x) = -3x^2 + 3x + 6; P_2(x) = 3x^2 - 9x + 6; P_3(x) = -x^2 - x + 6 \text{ et } P_4(x) = x^2 - 5x + 6$$

### Exercice 11

$\forall n \in \mathbb{N}$ , posons :  $P(n) : 9^n - 2^n$  divisible par 7 .

Initialisation :  $9^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$  est divisible par 7 donc  $P(0)$  est vraie.

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier  $n \geq 0$  pour lequel  $P(n)$  est vraie c'est à dire

$9^n - 2^n$  divisible par 7 donc il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $9^n - 2^n = k \times 7$  donc  $9^n = 2^n + 7k$

Or,

$$9^{n+1} - 2^{n+1} = 9 \times 9^n - 2 \times 2^n \text{ donc } 9^{n+1} - 2^{n+1} = 9 \times (2^n + 7k) - 2 \times 2^n = 9 \times 2^n + 7 \times kn - 2 \times 2^n \text{ donc}$$

$$9^{n+1} - 2^{n+1} = 7 \times 2^n - 7 \times kn = 7(9^n + kn)$$

Or,  $(9^n + kn) = k' \in \mathbb{Z}$  donc  $9^{n+1} - 2^{n+1}$  est divisible par 7 donc  $P(n+1)$  est vraie.

Conclusion :  $P(n)$  est initialisée au rang  $n=0$  et héréditaire donc vraie pour tout entier naturel  $n$  d'après le principe du raisonnement par récurrence donc  $\forall n \in \mathbb{N}, 9^n - 2^n$  divisible par 7

### Exercice 12

(a) Supposons que  $11 \mid (6a+5b)$  . Or  $11 \mid (11a+11b)$  .

On déduit que  $11 \mid (11a+11b) - (6a+5b)$  donc  $11 \mid (5a+6b)$  .

(b) Supposons que  $11 \mid (5a+6b)$  . Or  $11 \mid (11a+11b)$  .

On déduit que  $11 \mid (11a+11b) - (5a+6b)$  donc  $11 \mid (6a+5b)$  .

Conclusion :  $11 \mid (6a+5b) \Leftrightarrow 11 \mid (5a+6b)$

**Exercice 13**

1.  $d|(n+6)$  donc  $d|(2n+12)$   
 $d|(2n+12)$  et  $d|(2n+3)$  donc  $d|(2n+12)-(2n+3)$  donc  $d|9$   
 Or, les diviseurs positifs de 9 sont 1;3 et 9 donc  $d \in \{1;3;9\}$

2.  $d|(n+6)$  et  $d|(2n+3)$  donc  $d|(2n+3)-(n+6)$  donc  $d|(n-3)$

si  $d=1$  alors  $n-3=k$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  donc  $n=k+3$

Or,  $n \in \mathbb{N}$  donc  $k \in \mathbb{Z}, k \geq -3$

Ainsi, les couples  $(k+3;1)$  avec  $k \in \mathbb{Z}, k \geq -3$  conviennent

si  $d=3$  alors  $n-3=3k$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  donc  $n=3k+3$

Or,  $n \in \mathbb{N}$  donc  $k \in \mathbb{Z}, k \geq -1$

Ainsi, les couples  $(3k+3;3)$  avec  $k \in \mathbb{Z}, k \geq -1$  conviennent

si  $d=9$  alors  $n-3=9k$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  donc  $n=9k+3$

Or,  $n \in \mathbb{N}$  donc  $k \in \mathbb{N}$

Ainsi, les couples  $(9k+3;9)$  avec  $k \in \mathbb{N}$  conviennent

**Exercice 14**

1. Si  $d$  est un diviseur de  $x$  et  $y$  alors  $d$  est un diviseur de toute combinaison linéaire de  $x$  et  $y$  donc un diviseur de  $a=x+y$  et  $b=2x+3y$ .
2. 
$$\begin{cases} a=x+y \\ b=2x+3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=a-x \\ b=2x+3(a-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=a-x \\ b=-x+3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=a-(3a-b) \\ x=3a-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3a-b \\ y=-2a+b \end{cases}$$
3. Si  $d'$  est un diviseur de  $a$  et  $b$  alors  $d'$  est un diviseur de toute combinaison linéaire de  $a$  et  $b$  donc en particulier diviseur de  $x=3a-b$  et  $y=-2a+b$ .
4. Posons  $x=20, y=30, a=x+y=20+30=50$  et  $b=2x+3y=40+90=130$ .  
 D'après les questions 1. et 3., les diviseurs communs à  $x$  et  $y$  sont les diviseurs communs à  $a$  et  $b$ .  
 Or, les diviseurs de 20 sont -20;-10;-5;-4;-2;-1;1;2;4;5;10 et 20.  
 Les diviseurs de 30 sont -30;-15;-10;-6;-5;-3;-2;-1;1;2;3;5;6;10;15 et 30.  
 donc les diviseurs communs à 20 et 30 sont -10;-5;-2;-1;1;2;5 et 10

Conclusion : Les diviseurs communs à 20;30;50 et 130 sont 10;-5;-2;-1;1;2;5 et 10.