

Chapitre 3 : Moyenne et médiane

I. Moyenne d'une série statistique

Exemple 1 : Le tableau ci-dessous présente la répartition d'une chaîne de restaurants en fonction du nombre de ses employés :

Nombre d'employés	1	2	3	4	5	6	7
Effectifs	2	10	48	90	54	14	4

La moyenne du nombre d'employés par magasin arrondi à 0,01 près est égale à :

$$\bar{x} = \frac{2 \times 1 + 10 \times 2 + 48 \times 3 + 90 \times 4 + 54 \times 5 + 14 \times 6 + 4 \times 7}{2 + 10 + 48 + 90 + 54 + 14 + 4} = \frac{908}{222} \approx 4,09$$

Définition : La **moyenne pondérée** d'une série statistique est le nombre réel, noté $\bar{x}$, défini par :

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + \dots + n_p x_p}{N}$$

Remarques :

- la moyenne permet de résumer une série statistique à l'aide d'un seul nombre
- la moyenne ne donne aucune information sur la dispersion des valeurs.

Propriété : Si on note $f_i = \frac{n_i}{N}$ la fréquence de la valeur x_i alors $\bar{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_p x_p$.

Démonstration :

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + \dots + n_p x_p}{N} = \frac{n_1}{N} x_1 + \frac{n_2}{N} x_2 + \dots + \frac{n_p}{N} x_p = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_p x_p \quad \#$$

Propriété : linéarité de la moyenne

- Si toutes les valeurs d'une série statistique sont multipliées par un même réel a , sans changer les effectifs, alors la moyenne est également multipliée par a c'est à dire :
Si $y_i = a x_i$ alors $\bar{y} = a \bar{x}$
- Si on ajoute un même réel b à chacune des valeurs d'une série statistique, sans changer les effectifs alors la moyenne est également augmentée de la valeur b c'est à dire :
Si $y_i = x_i + b$ alors $\bar{y} = \bar{x} + b$

Remarque : on peut résumer les deux propriétés en une seule : si $y_i = a x_i + b$ alors $\bar{y} = a \bar{x} + b$.

Démonstration :

- Notons $y_i = a x_i$ d'effectif n_i . On a alors :

$$\bar{y} = \frac{n_1 a x_1 + n_2 a x_2 + n_3 a x_3 + \dots + n_p a x_p}{N} = \frac{a(n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_p x_p)}{N} = a \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_p x_p}{N} = a \bar{x}$$

- Notons $y_i = x_i + b$ d'effectif n_i . On a alors :

$$\bar{y} = \frac{n_1(x_1 + b) + n_2(x_2 + b) + n_3(x_3 + b) + \dots + n_p(x_p + b)}{N} = \frac{(n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_p x_p) + N b}{N}$$

$$\bar{y} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_p x_p}{N} + b = \bar{x} + b$$

#

II. Médiane d'une série statistique

Définition : La **médiane**, notée Me , d'une série statistique est telle que :

- 50% au moins des individus ont une valeur du caractère inférieure ou égale à Me
- 50% au moins des individus ont une valeur supérieure ou égale à Me .

Définition : Pour un caractère quantitatif discret, on peut calculer la médiane de 2 façons :

- On ordonne les valeurs de la série par ordre croissant
 - si la série est de taille $2p + 1$, Me est la valeur du terme de rang $p + 1$
 - si la série est de taille $2p$, Me est la moyenne des valeurs des termes de rang p et $p + 1$
- On construit le tableau des fréquences cumulées croissantes.
 - la médiane est la plus petite valeur dont la fréquence cumulée croissante dépasse 0,5.

Remarques :

- La médiane est une mesure de tendance centrale (comme la moyenne)
- Contrairement à la moyenne, la médiane n'est pas influencée par les valeurs extrêmes
- si l'effectif total est impair alors la médiane partage la série statistique en deux groupes de même effectif.

Exemple 2 : Un devoir commun de mathématiques pour 125 élèves de 1ère d'un lycée a donné les résultats suivants :

Note	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Effectifs cumulés	4	10	19	31	48	70	90	97	103	111	117	122	123	125

Déterminons rigoureusement la médiane Me de cette série statistique.

Il y a 125 valeurs rangées par ordre croissant. 125 est impair et $125 : 2 = 62,5$ donc médiane est la 63ème valeur de la série statistique ordonnée croissante donc $Me = 10$.