

Chapitre 1 : Calcul fractionnaire

I. Opérations sur les fractions

1. Quotient de deux nombres

Définitions :

- $\frac{a}{b}$ (avec $b \neq 0$) est le quotient de a par b . On peut écrire $\frac{a}{b} = a : b$
- $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b est égal à a (avec $b \neq 0$)

Exemple 1 : $\frac{2}{3}$ est le nombre qui multiplié par 3 est égal à 2. On a $\frac{2}{3} \times 3 = 2$.

2. Quotients égaux

Propriété : la valeur d'un quotient ne change pas si on multiplie ou si on divise son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul (différent de zéro).

$$\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \frac{a : k}{b : k} = \frac{a}{b} \quad \text{avec } k \neq 0$$

Exemple 2 : $\frac{12}{15} = \frac{12:3}{15:3} = \frac{4}{5}$ $\frac{14}{21} = \frac{14:7}{21:7} = \frac{2}{3}$ $\frac{1,56}{2,5} = \frac{1,56 \times 100}{2,5 \times 100} = \frac{156}{250} = \frac{156:2}{250:2} = \frac{78}{125}$

Propriété : un même nombre rationnel admet une infinité d'écritures fractionnaires toutes égales.

Exemple 3 : $0,5 = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{2,9}{5,8} = \frac{100}{200} \dots$

3. Fractions

Définition : Parmi toutes les écritures fractionnaires d'un même nombre, il en existe qu'on appelle fractions. Une fraction est un quotient dont le numérateur et le dénominateur sont des entiers.

Exemple 4 : $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$ et $\frac{78}{125}$ obtenues à l'exemple précédent sont des fractions irréductibles.

Méthode : Réduction de fractions au même dénominateur

Pour réduire deux fractions au même dénominateur, on détermine un multiple commun aux dénominateurs (le plus petit possible) puis on procède comme dans l'exemple ci-dessous :

Exemple 5 : écrire les fractions $\frac{3}{15}$ et $\frac{7}{6}$ sous le même dénominateur.

Le plus petit multiple commun à 15 et à 6 est 30. On a alors $\frac{3}{15} = \frac{3 \times 2}{15 \times 2} = \frac{6}{30}$ et $\frac{7}{6} = \frac{7 \times 5}{6 \times 5} = \frac{35}{30}$.

Remarque : écrire deux fractions sous le même dénominateur permet notamment de les comparer.

4. Comparaison de deux fractions**Propriétés :**

- Deux fractions écrites sous un même dénominateur positif sont rangées dans le même ordre que leurs numérateurs.
- Deux fractions positives écrites sous un même numérateur sont rangées dans l'ordre inverse de leurs dénominateurs.

Exemple 6 :

$$\frac{4}{5} < \frac{7}{5} \text{ car } 4 < 7$$

$$\frac{-8}{9} < \frac{-5}{9} \text{ car } -8 < -5$$

$$\frac{4}{3} = \frac{20}{15} < \frac{21}{15} \text{ car } 20 < 21$$

$$\frac{2}{3} > \frac{2}{5} \text{ car } 3 < 5$$

$$\frac{5}{4} < \frac{5}{3} \text{ car } 4 > 3$$

$$\frac{11}{2} > \frac{11}{3} \text{ car } 2 < 3$$

5. Addition ou soustraction de fractions

Règle de calcul : Pour additionner ou soustraire des nombres en écritures fractionnaires :

- On les écrit sous le même dénominateur
- On additionne ou on soustrait les numérateurs et on garde le dénominateur commun

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Exemple 7 :

$$A = \frac{3}{8} + \frac{1}{3} = \frac{9}{24} + \frac{8}{24} = \frac{17}{24}$$

$$B = \frac{3,1}{1,3} - \frac{0,5}{6,5} = \frac{31}{13} - \frac{1}{13} = \frac{30}{13}$$

$$C = \frac{7}{3} - \frac{5}{7} = \frac{49}{21} - \frac{15}{21} = \frac{34}{21}$$

$$D = \frac{11}{15} + \frac{2}{25} - \frac{1}{5} = \frac{55}{75} + \frac{6}{75} - \frac{15}{75} = \frac{46}{75}$$

6. Multiplication de fractions

Règle de calcul : Pour multiplier deux quotients, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \text{ avec } b \neq 0 \text{ et } d \neq 0$$

Exemple 8 : $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{4 \times 7} = \frac{15}{28}$

Très important : avant d'exécuter les produits des numérateurs et des dénominateurs, on cherche à décomposer les nombres en produits plus simples afin de simplifier les calculs.

Exemple 9 : $\frac{15}{16} \times \frac{24}{25} = \frac{5 \times 3 \times 4 \times 6}{4 \times 4 \times 5 \times 5} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$ $\frac{14}{33} \times \frac{55}{21} = \frac{2 \times 7 \times 5 \times 11}{3 \times 11 \times 7 \times 3} = \frac{10}{9}$

7. Division de fractions

Propriété : tout nombre non nul de la forme $\frac{a}{b}$ a pour inverse $\frac{b}{a}$

Règle de calcul : Diviser le nombre $\frac{a}{b}$ avec $b \neq 0$ par un nombre non nul $\frac{c}{d}$ avec $c \neq 0$ et $d \neq 0$

revient à multiplier $\frac{a}{b}$ par l'inverse de $\frac{c}{d}$ c'est à dire par $\frac{d}{c}$ autrement dit :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \text{ avec } b \neq 0, c \neq 0 \text{ et } d \neq 0$$

Exemple 10 : $\frac{-7}{3} : \frac{4}{5} = -\frac{7}{3} \times \frac{5}{4} = -\frac{35}{12}$ et $\frac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{9}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{3 \times 3 \times 2 \times 2}{2 \times 3} = \frac{3 \times 2}{1} = 6$.