

Devoir Maison n°2

Second degré – Applications et modélisation

Exercice 1 : Trajectoire d'un mobile

Un joueur lance un ballon d'entraînement. La trajectoire du ballon est modélisée par la fonction

$$f(x) = -0,1x^2 + x + 2,4$$

où x représente la distance horizontale parcourue par le ballon (en mètres) et $f(x)$ représente la hauteur du ballon par rapport au sol (en mètres).

1. À quelle hauteur du sol le ballon est-il lancé ?
2. **Forme canonique et sommet :**
 - (a) A l'aide des formules, montrer que $f(x) = -0,1(x - 5)^2 + 4,9$.
 - (b) En déduire la hauteur maximale atteinte par le ballon ainsi que la distance horizontale à laquelle cet extremum est atteint.
3. **Point d'impact :**
 - (a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
 - (b) Déterminer la forme factorisée de $f(x)$.
 - (c) En déduire la distance à laquelle le ballon retombe au sol.
4. **Franchissement d'un obstacle :** Un filet de 2 m de hauteur est placé à 10 m du joueur. Le ballon passe-t-il au-dessus du filet ? Justifier par le calcul.

Exercice 2 : Économie d'entreprise

Une entreprise fabrique et vend des enceintes Bluetooth portables. La capacité maximale de production hebdomadaire est de 80 unités.

Pour une quantité x d'enceintes produites et vendues (avec $x \in [0; 80]$) :

- Le coût total de production, en euros, est donné par : $C(x) = x^2 + 20x + 400$.
- Chaque enceinte est vendue au prix unitaire fixe de 70 €.

1. **Recette et Bénéfice :**
 - (a) Exprimer la recette totale $R(x)$ en fonction de x .
 - (b) Montrer que le bénéfice hebdomadaire $B(x) = R(x) - C(x)$, exprimé en euros, est donné sur $[0; 80]$ par :
$$B(x) = -x^2 + 50x - 400$$
2. **Seuil de rentabilité :**
 - (a) Résoudre l'équation $B(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
 - (b) En déduire le signe de $B(x)$ sur l'intervalle $[0; 80]$. Justifier votre réponse.
 - (c) En déduire le nombre d'enceintes que l'entreprise doit produire et vendre pour réaliser un bénéfice strictement positif.
3. **Bénéfice maximal :**
 - (a) Dresser le tableau de variations de la fonction B sur $[0; 80]$. Justifier votre réponse.
 - (b) En déduire la quantité d'enceintes à vendre pour obtenir un bénéfice maximal, puis préciser le montant de ce bénéfice.

Exercice 3 : Optimisation géométrique

Un architecte conçoit un parc rectangulaire accolé à un bâtiment existant. Le parc est délimité sur trois côtés par une clôture en bois de longueur totale 40 mètres, le quatrième côté étant formé par le mur du bâtiment (qui ne nécessite donc pas de clôture).

On note x la largeur du terrain (en mètres), perpendiculaire au mur du bâtiment.

1. Expression de l'aire :

- (a) Justifier que la longueur du terrain (parallèle au mur) s'exprime en fonction de x par $40 - 2x$.
- (b) Justifier que l'ensemble de définition de la variable x est l'intervalle $]0; 20[$.
- (c) Montrer que l'aire $A(x)$ du parc, en m^2 , est donnée par $A(x) = -2x^2 + 40x$.

2. Étude de l'aire :

- (a) Déterminer la forme canonique de $A(x)$.
- (b) En déduire les dimensions du parc pour lesquelles l'aire est maximale. Quelle est alors cette aire maximale ?

3. Contrainte de surface minimale : L'architecte souhaite que l'aire du parc soit supérieure ou égale à 150 m^2 .

- (a) Montrer que cela revient à résoudre l'inéquation $-2x^2 + 40x - 150 \geq 0$.
- (b) Résoudre cette inéquation sur $]0; 20[$ et conclure quant aux grandeurs possibles pour la largeur x .