

Corrigé Détaillé du Devoir Maison n°2

Première Spécialité Mathématiques – Second degré : Applications et modélisation

Date du devoir : 28 septembre 2026

Exercice 1 : Trajectoire d'un mobile

La trajectoire du ballon est modélisée sur $[0; +\infty[$ par la fonction $f(x) = -0,1x^2 + x + 2,4$.

1. Hauteur de lancer du ballon

La hauteur au moment du lancer correspond à la position initiale du ballon, c'est-à-dire pour une distance horizontale $x = 0$:

$$f(0) = -0,1(0)^2 + 1(0) + 2,4 = 2,4$$

Conclusion : Le ballon est lancé à une hauteur de 2,4 mètres du sol.

2. Forme canonique et sommet

(a) **À l'aide des formules, montrer que $f(x) = -0,1(x - 5)^2 + 4,9$:**

Identifions les coefficients de la fonction polynôme du second degré $f(x) = -0,1x^2 + x + 2,4$:

$$a = -0,1 \quad ; \quad b = 1 \quad ; \quad c = 2,4$$

Calculons α et β à l'aide des formules du cours :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \times (-0,1)} = -\frac{1}{-0,2} = 5$$

$$\beta = f(\alpha) = f(5) = -0,1(5)^2 + 1(5) + 2,4 = -0,1 \times 25 + 5 + 2,4 = -2,5 + 7,4 = 4,9$$

On applique la formule $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$:

$$f(x) = -0,1(x - 5)^2 + 4,9$$

(b) **Hauteur maximale et distance horizontale associée :**

La forme canonique donne $\alpha = 5$, $\beta = 4,9$ et $a = -0,1$. Comme $a = -0,1 < 0$, la fonction f atteint son maximum en $x = \alpha = 5$, et ce maximum vaut $\beta = 4,9$.

Conclusion : La hauteur maximale atteinte par le ballon est de 4,9 mètres, et cet extremum est atteint à une distance horizontale de 5 mètres du joueur.

3. Point d'impact

- (a) **Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$:**

Calculons le discriminant Δ du polynôme $f(x) = -0,1x^2 + x + 2,4$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-0,1) \times 2,4 = 1 + 0,96 = 1,96$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions réelles distinctes sur $\mathbb{R}$. Remarquons que $\sqrt{1,96} = 1,4$:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 1,4}{2 \times (-0,1)} = \frac{-2,4}{-0,2} = 12$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 1,4}{2 \times (-0,1)} = \frac{0,4}{-0,2} = -2$$

Conclusion : L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est $S = \{-2; 12\}$.

- (b) **Déterminer la forme factorisée de $f(x)$:**

D'après le cours, la forme factorisée d'un polynôme du second degré ayant deux racines x_1 et x_2 est $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Ici $a = -0,1$, $x_1 = 12$ et $x_2 = -2$:

$$f(x) = -0,1(x - 12)(x - (-2)) = -0,1(x - 12)(x + 2)$$

- (c) **En déduire la distance à laquelle le ballon retombe au sol :**

Le ballon retombe au sol lorsque $f(x) = 0$ avec une distance $x \geq 0$. Parmi les deux solutions réelles $x_1 = 12$ et $x_2 = -2$, seule la valeur positive $x = 12$ a un sens physique dans le problème.

Conclusion : Le ballon retombe au sol à une distance de 12 mètres du joueur.

4. Franchissement d'un obstacle

Un filet de 2 m de hauteur est situé à $x = 10$ m du joueur. Calculons la hauteur du ballon à cette distance :

$$f(10) = -0,1(10)^2 + 10 + 2,4 = -0,1 \times 100 + 10 + 2,4 = -10 + 10 + 2,4 = 2,4 \text{ m}$$

Comme $2,4 > 2$, la hauteur du ballon est supérieure à la hauteur du filet.

Conclusion : $2,4 \text{ m} > 2 \text{ m}$ donc le ballon passe au-dessus du filet.

Exercice 2 : Économie d'entreprise

Pour $x \in [0; 80]$, le coût de production est $C(x) = x^2 + 20x + 400$ et le prix de vente unitaire est de 70 €.

1. Recette et Bénéfice

- (a) **Exprimer la recette totale $R(x)$ en fonction de x :**

La recette est le produit du nombre d'enceintes vendues par le prix unitaire :

$$R(x) = 70x$$

- (b) **Montrer que le bénéfice $B(x) = R(x) - C(x)$ est donné par $B(x) = -x^2 + 50x - 400$:**

Pour tout $x \in [0; 80]$:

$$B(x) = R(x) - C(x) = 70x - (x^2 + 20x + 400) = 70x - x^2 - 20x - 400$$

$$B(x) = -x^2 + 50x - 400$$

2. Seuil de rentabilité

(a) **Résoudre l'équation $B(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$:**

Pour le polynôme $B(x) = -x^2 + 50x - 400$ ($a = -1$, $b = 50$, $c = -400$) :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 50^2 - 4 \times (-1) \times (-400) = 2500 - 1600 = 900$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation $B(x) = 0$ possède deux solutions réelles distinctes sur $\mathbb{R}$ ($\sqrt{900} = 30$) :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-50 - 30}{2 \times (-1)} = \frac{-80}{-2} = 40$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-50 + 30}{2 \times (-1)} = \frac{-20}{-2} = 10$$

Conclusion : L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est $S = \{10; 40\}$.

(b) **En déduire le signe de $B(x)$ sur l'intervalle $[0; 80]$:**

Un polynôme du second degré est du signe de son coefficient a à l'extérieur de ses racines, et du signe contraire de a entre ses racines. Ici, $a = -1 < 0$ et les racines sont 10 et 40. On en déduit :

- $B(x) < 0$ sur $[0; 10[\cup]40; 80]$;
- $B(x) = 0$ pour $x = 10$ et $x = 40$;
- $B(x) > 0$ sur $]10; 40[$.

(c) **Nombre d'enceintes pour un bénéfice strictement positif :**

D'après l'étude du signe précédente, $B(x) > 0$ si et seulement si $x \in]10; 40[$. Puisque le nombre d'enceintes est un nombre entier, les valeurs possibles pour x vont de 11 à 39.

Conclusion : L'entreprise doit produire et vendre entre 11 et 39 enceintes (incluses) pour réaliser un bénéfice strictement positif.

3. Bénéfice maximal

(a) **Dresser le tableau de variations de la fonction B sur $[0; 80]$:**

B est un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1 < 0$. Sa courbe représentative est une parabole orientée vers le bas. La fonction est donc strictement croissante sur $[0; \alpha]$ puis strictement décroissante sur $[\alpha; 80]$, où :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{50}{2 \times (-1)} = 25$$

Le maximum sur $[0; 80]$ vaut :

$$\beta = B(25) = -(25)^2 + 50 \times 25 - 400 = -625 + 1250 - 400 = 225$$

Calculons les valeurs aux bornes :

- $B(0) = -400$
- $B(80) = -(80)^2 + 50 \times 80 - 400 = -6400 + 4000 - 400 = -2800$

Tableau de variation :

x	0	25	80
$B(x)$	-400	225	-2800

(b) **Quantité d'enceintes à vendre et montant du bénéfice maximal :**

D'après le tableau de variations, la fonction B atteint son maximum absolu pour $x = 25$, et ce maximum est égal à 225.

Conclusion : Pour obtenir un bénéfice maximal, l'entreprise doit vendre 25 enceintes. Le montant de ce bénéfice maximal est de 225 €.

Exercice 3 : Optimisation géométrique

1. Expression de l'aire

(a) **Justifier que la longueur du terrain s'exprime par $40 - 2x$:**

Le terrain est délimité sur trois côtés par une clôture de longueur totale 40 m. Ces trois côtés sont constitués de deux côtés de largeur x (perpendiculaires au mur) et d'un côté de longueur L (parallèle au mur). Ainsi :

$$2x + L = 40 \iff L = 40 - 2x$$

(b) **Justifier que l'ensemble de définition de la variable x est $]0; 20[$:**

Les dimensions d'un terrain doivent être strictement positives :

- La largeur doit être strictement positive : $x > 0$;
- La longueur doit être strictement positive : $L > 0 \iff 40 - 2x > 0 \iff 2x < 40 \iff x < 20$.

Ainsi, l'ensemble de définition de la variable x est bien l'intervalle $]0; 20[$.

(c) **Montrer que $A(x) = -2x^2 + 40x$:**

L'aire d'un parc rectangulaire est donnée par le produit de sa largeur par sa longueur :

$$A(x) = x \times L = x(40 - 2x) = 40x - 2x^2 = -2x^2 + 40x$$

2. Étude de l'aire

(a) **Déterminer la forme canonique de $A(x)$:**

Pour $A(x) = -2x^2 + 40x$, on a $a = -2$, $b = 40$ et $c = 0$. Calculons α et β :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{40}{2 \times (-2)} = 10$$

$$\beta = A(\alpha) = A(10) = -2(10)^2 + 40(10) = -200 + 400 = 200$$

La forme canonique de $A(x)$ est donc :

$$A(x) = -2(x - 10)^2 + 200$$

(b) **Dimensions du parc et aire maximale :**

Comme $a = -2 < 0$, la fonction A atteint son maximum en $x = \alpha = 10$, et ce maximum vaut $\beta = 200$. Les dimensions associées sont :

- Largeur : $x = 10$ m ;
- Longueur : $L = 40 - 2(10) = 20$ m.

Conclusion : L'aire est maximale pour une largeur de 10 mètres et une longueur de 20 mètres. Cette aire maximale s'élève à 200 m².

3. Contrainte de surface minimale

- (a) **Montrer que cela revient à résoudre** $-2x^2 + 40x - 150 \geq 0$:

L'architecte souhaite une aire supérieure ou égale à 150 m², c'est-à-dire $A(x) \geq 150$.

$$A(x) \geq 150 \iff -2x^2 + 40x \geq 150 \iff -2x^2 + 40x - 150 \geq 0$$

- (b) **Résoudre cette inéquation sur $]0; 20[$ et conclure :**

Considérons le polynôme $P(x) = -2x^2 + 40x - 150$ sur $]0; 20[$. Calculons son discriminant Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 40^2 - 4 \times (-2) \times (-150) = 1600 - 1200 = 400$$

Comme $\Delta > 0$, $P(x)$ admet deux racines réelles distinctes ($\sqrt{400} = 20$) :

$$x_1 = \frac{-40 - 20}{2 \times (-2)} = \frac{-60}{-4} = 15$$

$$x_2 = \frac{-40 + 20}{2 \times (-2)} = \frac{-20}{-4} = 5$$

Le coefficient $a = -2$ étant négatif, le polynôme $P(x)$ est positif ou nul entre ses racines, c'est-à-dire pour $x \in [5; 15]$. Ces valeurs étant toutes contenues dans l'ensemble de définition $]0; 20[$, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $[5; 15]$.

Conclusion : Pour que l'aire du parc soit supérieure ou égale à 150 m², la largeur x doit être comprise entre 5 mètres et 15 mètres ($x \in [5; 15]$).