

Corrigé Détaillé du Devoir Maison n°1

Première Spécialité Mathématiques – Second degré

Date du devoir : 23 septembre 2026

Exercice 1 : Questions de cours

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

1. Forme canonique

La forme canonique générale de $f(x)$ est :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

- (a) Expression de α : $\alpha = -\frac{b}{2a}$
- (b) Expression de β : $\beta = f(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a}$

2. Discriminant

La formule du discriminant, noté Δ , est :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

3. Cas où $\Delta > 0$

On suppose que $\Delta > 0$.

a) Expressions des deux racines x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

b) Forme factorisée de $f(x)$:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

c) Calcul de la somme des racines $S = x_1 + x_2$:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

d) Calcul du produit des racines $P = x_1 \times x_2$:

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Exercice 2 : Racines et formes canoniques

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$. Ici, $a = 3$, $b = -5$ et $c = -2$.

1. Déterminer les racines de la fonction f

Pour trouver les racines de f , on résout l'équation $f(x) = 0$. Calculons le discriminant Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 + 24 = 49$$

Puisque $\Delta > 0$, la fonction f possède deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{5 - 7}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{5 + 7}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

Conclusion : Les racines de f sont $x_1 = -\frac{1}{3}$ et $x_2 = 2$.

2. Forme canonique à l'aide des formules du cours

Calculons α et β avec les formules du cours :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{2 \times 3} = \frac{5}{6}$$

$$\beta = f(\alpha) = f\left(\frac{5}{6}\right) = 3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 5 \times \left(\frac{5}{6}\right) - 2 = 3 \times \frac{25}{36} - \frac{25}{6} - 2 = \frac{25}{12} - \frac{50}{12} - \frac{24}{12} = -\frac{49}{12}$$

Conclusion : La forme canonique de $f(x)$ est $f(x) = 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{49}{12}$.

3. Forme canonique sans les formules (par complétion du carré)

Partons de la forme développée en mettant le coefficient $a = 3$ en facteur devant les termes en x :

$$f(x) = 3x^2 - 5x - 2 = 3\left(x^2 - \frac{5}{3}x\right) - 2$$

On remarque que $x^2 - \frac{5}{3}x$ est le début du développement du carré $\left(x - \frac{5}{6}\right)^2$:

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = x^2 - 2 \times x \times \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36}$$

D'où $x^2 - \frac{5}{3}x = \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}$. En remplaçant dans $f(x)$:

$$f(x) = 3\left[\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right] - 2 = 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - 3 \times \frac{25}{36} - 2$$

$$f(x) = 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{12} - \frac{24}{12} = 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{49}{12}$$

On retrouve bien exactement le même résultat qu'à la question 2.

Exercice 3 : Résolution d'équations du second degré

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2 - 4x + 4 = 0$

Méthode 1 (Discriminant) : $a = 1$, $b = -4$, $c = 4$.

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 16 - 16 = 0$$

Comme $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution (racine double) :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \times 1} = 2$$

Méthode 2 (Identité remarquable) : On reconnaît $(x - 2)^2 = 0 \iff x - 2 = 0 \iff x = 2$.

Conclusion : L'ensemble des solutions est $S = \{2\}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2x^2 - x + 3 = 0$

$a = 2$, $b = -1$, $c = 3$.

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 1 - 24 = -23$$

Puisque $\Delta < 0$, l'équation ne possède aucune solution réelle.

Conclusion : L'ensemble des solutions est $S = \emptyset$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $6x^2 + 5x - 1 = 0$

$a = 6$, $b = 5$, $c = -1$.

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 6 \times (-1) = 25 + 24 = 49$$

Puisque $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2 \times 6} = \frac{-5 - 7}{12} = \frac{-12}{12} = -1$$

$$x_2 = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2 \times 6} = \frac{-5 + 7}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Conclusion : L'ensemble des solutions est $S = \{-1; \frac{1}{6}\}$.

Exercice 4 : Équation rationnelle

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\frac{x^2 - 3x - 5}{x^2 - 2x - 3} = 0$$

Rappel de méthode : Une équation de la forme $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$ se résout en déterminant d'abord les valeurs interdites où $B(x) = 0$, puis en résolvant l'équation $A(x) = 0$ pour les valeurs autorisées.

Étape 1 : Recherche des valeurs interdites (dénominateur non nul)

L'expression est définie si et seulement si $x^2 - 2x - 3 \neq 0$. Résolvons l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$:
 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$.

$$x'_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{2 - 4}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x'_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{2 + 4}{2} = 3$$

L'ensemble de définition est donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$.

Étape 2 : Annulation du numérateur

Pour $x \in \mathcal{D}$, l'équation équivaut à $x^2 - 3x - 5 = 0$. Calculons le discriminant du numérateur Δ_{num} :

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 9 + 20 = 29$$

Puisque $\Delta > 0$, l'équation $x^2 - 3x - 5 = 0$ possède deux solutions :

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{29}}{2 \times 1} = \frac{3 - \sqrt{29}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{29}}{2 \times 1} = \frac{3 + \sqrt{29}}{2}$$

Étape 3 : Vérification de la compatibilité

Vérifions si ces candidats appartiennent à $\mathcal{D}$ (c'est-à-dire qu'ils sont différents de -1 et 3) :

- $\sqrt{29} \approx 5,385$, donc $x_1 = \frac{3-5,385}{2} \approx -1,19 \neq -1$ et $\neq 3$.
- $x_2 = \frac{3+5,385}{2} \approx 4,19 \neq -1$ et $\neq 3$.

Les deux solutions trouvées sont bien compatibles avec le domaine de définition.

Conclusion : L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$S = \left\{ \frac{3 - \sqrt{29}}{2} ; \frac{3 + \sqrt{29}}{2} \right\}$$