

Chapitre 1 : Second degré

I. Fonction polynôme du second degré

1. Définition

Définition : Une fonction polynôme du second degré est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Remarques :

- Les réels a, b et c sont appelés les **coefficients** de ce polynôme.
- L'écriture $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ la **forme développée** de $f(x)$
- Par abus de langage, on parle souvent de polynôme du second degré au lieu de fonction polynôme du second degré.

Exemple 1 :

- $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ est une fonction trinôme du second degré avec $a = 2, b = -3$ et $c = 1$
 $2x^2 - 3x + 1$ est la forme développée de la fonction trinôme f .
- $g(x) = -3x^2$ est une fonction trinôme du second degré avec $a = -3, b = 0$ et $c = 0$
 $-3x^2$ est la forme développée de la fonction trinôme g .

2. Racines d'un polynôme

Définition : Les **racines** d'une fonction polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$

Remarque : x_0 est une solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ si et seulement si $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$.

Propriété : Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ admettant deux racines x_1 et x_2 alors f peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ appelée **forme factorisée** de $f(x)$.

Remarque : Il existe une infinité de fonctions polynômes admettant deux réels x_1 et x_2 pour racines.

Démonstration :

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ de la forme

$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ admettant deux racines x_1 et x_2 .

Comme x_1 est une racine de f on déduit que $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$ et par conséquent $c = -ax_1^2 - bx_1$

d'où $f(x) = ax^2 + bx - ax_1^2 - bx_1 = a(x^2 - x_1^2) + b(x - x_1)$

d'où $f(x) = a(x - x_1)(x + x_1) + b(x - x_1)$

d'où $f(x) = (x - x_1)[a(x + x_1) + b]$

Comme x_2 est une racine de f on déduit que $(x_2 - x_1)[a(x_2 + x_1) + b] = 0$

Comme $x_2 \neq x_1$ on déduit que $a(x_2 + x_1) + b = 0$ donc $b = -a(x_2 + x_1)$

$$\text{d'où } f(x) = (x - x_1)[a(x + x_1) - a(x_2 + x_1)] = a(x - x_1)[(x + x_1) - (x_2 + x_1)]$$

$$\text{d'où } f(x) = a(x - x_1)[(x + x_1) - (x_2 + x_1)] = a(x - x_1)(x + x_1 - x_2 - x_1) = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \#$$

Exemple 2 : On considère la fonction polynôme du second degré $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

1. Montrer que 1 et -3 sont deux racines de f .

$$f(1) = 1^2 + 2 \times 1 - 3 = 1 + 2 - 3 = 3 - 3 = 0 \quad \text{et} \quad f(-3) = (-3)^2 + 2 \times (-3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$$

donc 1 et -3 sont deux racines du polynôme $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

2. Déduire sa forme factorisée.

f est une fonction polynôme du second degré avec $a = 1$ admettant 1 et -3 pour racines donc sa forme factorisée est $f(x) = 1 \times (x - 1) \times (x - (-3)) = (x - 1)(x + 3)$.

3. Polynômes égaux

Propriété : Deux fonctions trinômes du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$ avec $a' \neq 0$ sont **égales** si et seulement si **$a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$**

Démonstration :

- Si $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$ alors nécessairement $f(x) = g(x)$ pour tout réel x
- Si $f(x) = g(x)$ pour tout réel x alors en particulier $f(0) = g(0)$ donc $c = c'$

De même,

$$f(1) = g(1) \text{ donc } a + b + c = a' + b' + c' \text{ donc } a + b = a' + b' \text{ donc } (a - a') + (b - b') = 0$$

$$f(-1) = g(-1) \text{ donc } a - b + c = a' - b' + c' \text{ donc } a - b = a' - b' \text{ donc } (a - a') - (b - b') = 0$$

On obtient donc le système

$$\begin{cases} (a - a') + (b - b') = 0 \\ (a - a') - (b - b') = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - a') + (b - b') = 0 \\ 2(a - a') = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - a') + (b - b') = 0 \\ a = a' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = b' \\ a = a' \end{cases}$$

Conclusion : Si $f(x) = g(x)$ pour tout réel x alors nécessairement $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$

Conclusion : $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ avec $a \neq 0$, $a' \neq 0 \Leftrightarrow a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$ #

Exemple 3 : Montrer que la forme factorisée de $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ est $3(x - \frac{1}{3})(x + 1)$.

$$3(x - \frac{1}{3})(x + 1) \text{ est de la forme } a(x - x_1)(x - x_2) \text{ avec } a = 3; x_1 = \frac{1}{3} \text{ et } x_2 = -1.$$

De plus, $3(x - \frac{1}{3})(x + 1) = (3x - 1)(x + 1) = 3x^2 + 3x - x - 1 = 3x^2 + 2x - 1 = f(x)$ donc

$$3(x - \frac{1}{3})(x + 1) \text{ est bien la forme factorisée de } f(x).$$

4. Somme et produit des racines

Propriété : Soit $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$ une fonction polynôme du second admettant deux racines distinctes x_1 et x_2 . La somme S et le produit P des racines vérifient :

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{et} \quad P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Démonstration :

D'après la démonstration de la propriété du 2. Racines d'un polynôme, on a démontré que :

$$b = -a(x_2 + x_1) \quad \text{donc} \quad (x_1 + x_2) = \frac{-b}{a} \quad \text{avec} \quad a \neq 0$$

Or, comme f admet deux racines distinctes x_1 et x_2 on a $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ d'où :

$$a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow ax^2 - axx_2 - axx_1 + ax_1x_2 = ax^2 - a(x_1+x_2)x + c$$

$$ax^2 - axx_2 - axx_1 + ax_1x_2 = ax^2 - a(x_1+x_2)x + c \Leftrightarrow ax^2 - axx_2 - axx_1 + ax_1x_2 = ax^2 - axx_1 - axx_2 + c$$

$$ax^2 - axx_2 - axx_1 + ax_1x_2 = ax^2 - axx_1 - axx_2 + c \Leftrightarrow ax_1x_2 = c \Leftrightarrow x_1x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{avec} \quad a \neq 0 \quad \#$$

Exemple 4 : On considère la fonction polynôme du second degré $f(x) = 4x^2 + 7x - 2$.

1. Montrer que -2 est une racine de f .

$$f(-2) = 4 \times (-2)^2 + 7 \times (-2) - 2 = 4 \times 4 - 14 - 2 = 16 - 14 - 2 = 0 \quad \text{donc -2 est bien une racine de } f.$$

2. $x_1 = -2$ est une racine de f donc la deuxième racine x_2 vérifie

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-7}{4} \quad \text{donc} \quad -2 + x_2 = \frac{-7}{4} \quad \text{donc} \quad x_2 = \frac{-7}{4} + 2 = \frac{-7}{4} + \frac{8}{4} = \frac{1}{4}$$

ou bien

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \quad \text{donc} \quad x_2 = \frac{\frac{-1}{2}}{-2} = \frac{-1}{2} \times \frac{1}{-2} = \frac{1}{4}.$$

5. Signe d'un polynôme du second degré par sa forme factorisée

Propriété : Une fonction polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ admettant deux racines distinctes $x_1 < x_2$ est du signe de a sur $] -\infty; x_1[\cup] x_2; +\infty[$ et du signe de $-a$ sur $] x_1; x_2[$

Démonstration :

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ de la forme admettant deux racines

x_1 et x_2 telles que $x_1 < x_2$. On a alors $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.

On dresse alors le tableau de signe de $f(x)$:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$(x-x_1)$	-	0	+	+	
$(x-x_2)$	-	-	0	+	
$(x-x_1)(x-x_2)$	+	0	-	0	+
$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$	Signe de a	0	Signe de -a	0	Signe de a

d'où le résultat

#

Remarque : on dit aussi qu'une fonction polynôme du second degré admettant deux racines distinctes est du signe de « a » à l'extérieur des racines et du signe de « $-a$ » à l'intérieur des racines.

Exemple 5 : Résoudre $-5(x-3)(x+2) < 0$.

$f(x) = -5(x-3)(x+2)$ est une fonction polynôme du second degré avec $a = -5 < 0$ admettant deux racines réelles distinctes $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$.

On déduit son tableau de signes :

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

Conclusion : $S =]-\infty; -2[\cup]3; +\infty[$.

II. Équations du second degré

1. Forme canonique

Propriété : Toute fonction trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$, peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \text{ avec } \alpha = \frac{-b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = f(\alpha)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right] \\ f(x) &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}\right)\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(x - \alpha)^2 + \beta \end{aligned}$$

#

Définition : L'écriture $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ est appelée **forme canonique** de f .

Définition : Le réel $\Delta = b^2 - 4ac$, est appelé le **discriminant** du trinôme.

Exemple 6 : Déterminer la forme canonique de $f(x) = -x^2 + 4x - 7$.

$f(x) = -x^2 + 4x - 7$ est un polynôme du second degré avec $a = -1$; $b = 4$ et $c = -7$.

Sa forme canonique est donc de la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec

$$a = -1 \quad ; \quad \alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2 \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha) = f(2) = -2^2 + 4 \times 2 - 7 = -4 + 8 - 7 = -3$$

d'où $f(x) = -(x - 2)^2 - 3$ est la forme canonique de $f(x) = -x^2 + 4x - 7$

Exemple 7 : A l'aide des identités remarquables et sans utiliser les formules de calculs de α et de β , déterminer la forme canonique de $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$.

$$f(x) = 2x^2 - 20x + 10$$

$$f(x) = 2(x^2 - 10x) + 10$$

$$f(x) = 2(x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 - 5^2) + 10$$

$$f(x) = 2[(x - 5)^2 - 5^2] + 10$$

$$f(x) = 2[(x - 5)^2 - 25] + 10$$

$$f(x) = 2(x - 5)^2 - 50 + 10$$

$$f(x) = 2(x - 5)^2 - 40$$

$$f(x) = 2(x - 5)^2 - 40 \quad \text{est la forme canonique de} \quad f(x) = 2x^2 - 20x + 10.$$

Exemple 8 : Pour chacune des fonctions polynômes du second degré suivantes, préciser, si possible, la nature de sa forme (développée, factorisée, canonique, autre...)

- | | |
|---------------------------|---------|
| • $f(x) = 4x^2 - x + 7$ | forme : |
| • $g(x) = (x-1)(x-7)$ | forme : |
| • $h(x) = -4(2-x)(x-5)$ | forme : |
| • $i(x) = 5x - x^2 + 10$ | forme : |
| • $j(x) = 4(x-7)^2 + 13$ | forme : |
| • $k(x) = 5[(x-1)^2 - 3]$ | forme : |
| • $l(x) = (2x-1)(x+4)$ | forme : |

2. Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$

Propriété : On considère l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ dont le discriminant est le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation a 2 solutions réelles distinctes $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation a une seule solution $x_0 = \frac{-b}{2a}$ appelée racine double
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'a aucune solution.

Démonstration à connaître :

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ avec } a \neq 0 \Leftrightarrow a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0 \Leftrightarrow \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

- Si $\Delta > 0$ alors $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x + \frac{b}{2a} = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a}$
donc l'équation a bien deux solutions distinctes $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$ alors $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a}$
donc l'équation a bien une seule solution $x_0 = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$ alors $\left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \right] < 0$
donc l'équation n'a aucune solution réelle car $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$ et un carré est toujours positif ou nul #

Remarques :

- Si l'équation se factorise facilement (identité remarquable par exemple), il devient alors inutile d'appliquer ces formules pour résoudre l'équation
- De même, si on détermine une racine évidente $\{-2; -1; 1; 2\}$ par calcul mental, il suffit alors d'utiliser les formules de la somme ou du produit pour déterminer la seconde solution de l'équation.

Exemple 9 : Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$6x^2 - x - 1 = 0$	$x^2 - 5x + 7 = 0$	$4x^2 - 4x + 1 = 0$
--------------------	--------------------	---------------------

- Résolution de l'équation du second degré $6x^2 - x - 1 = 0$
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 6 \times (-1) = 1 + 24 = 25 = 5^2 > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-5}{12} = \frac{-4}{12} = \frac{-1}{3}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+5}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$
- Résolution de l'équation du second degré $x^2 - 5x + 7 = 0$
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 7 = 25 - 28 = -3 < 0$ donc l'équation n'admet aucune solution.
- Résolution de l'équation du second degré $4x^2 - 4x + 1 = 0$
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 16 - 16 = 0$ donc l'équation admet une seule solution $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

III. Variations et représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré

1. Variations d'une fonction polynôme du second degré

Propriété : La fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ admet pour tableau de variations :

Cas où $a < 0$			Cas où $a > 0$								
x	$-\infty$	α	$+\infty$	x	$-\infty$	α	$+\infty$				
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$-\infty$	$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque : La fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ admet un extremum en $\alpha = \frac{-b}{2a}$ qui vaut $\beta = -\frac{\Delta}{4a} = f(\alpha)$.

- Si $a > 0$ alors cet extremum est un minimum.
- Si $a < 0$ alors cet extremum est un maximum.

Démonstration dans le cas où $a > 0$ et $x > \alpha$

Soit f une fonction polynôme du second degré de forme canonique $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $a > 0$.

Soit $\alpha \leq u < v$ avec u et v deux réels. On a successivement :

$$0 \leq u - \alpha < v - \alpha$$

$$0^2 \leq (u - \alpha)^2 < (v - \alpha)^2 \text{ car la fonction carrée est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+$$

$$0 \leq a(u - \alpha)^2 < a(v - \alpha)^2 \text{ car } a > 0$$

$$\beta \leq a(u - \alpha)^2 + \beta < a(v - \alpha)^2 + \beta$$

donc $\beta \leq f(u) < f(v)$ donc f est croissante sur $[\alpha; +\infty[$

#

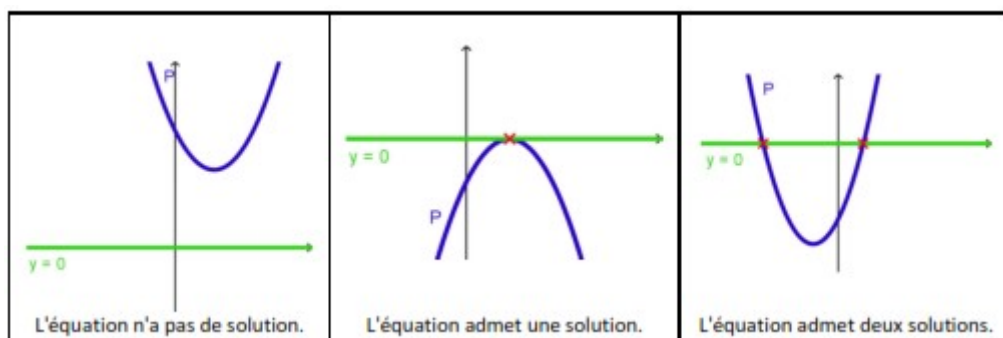
Remarques: Les autres cas s'obtiennent de manière analogue

Exemple 10 : Déterminer les variations de la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

$f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ est une fonction polynôme du second degré avec $a = 2$ et $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{4}$

donc f est décroissante sur $]-\infty; \frac{3}{4}]$ et croissante sur $[\frac{3}{4}; +\infty[$.

Remarque : Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ correspondent aux abscisses des points d'intersections entre la parabole (P) d'équation $y = ax^2 + bx + c$ et l'axe des abscisses.



$$\Delta < 0$$

$$\Delta = 0$$

$$\Delta > 0$$

Remarque : selon la valeur de a , la courbure peut être tournée dans l'autre sens sur les schémas ci-dessus !

IV. Signe d'un polynôme du second degré

1. Factorisation d'un polynôme du second degré

Propriété : Soit $ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ avec $x_0 = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$ alors $ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable

Démonstration :

Comme $a \neq 0$, on a $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

- Si $\Delta > 0$ alors $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a(x - x_1)(x - x_2)$
avec $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 = a(x - x_0)^2$ avec $x_0 = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ ne se factorise pas en produit de deux facteurs du 1^{er} degré car s'il se factorisait ainsi, il aurait deux racines ; ce n'est pas le cas car son discriminant est négatif.

Remarque : ce type de raisonnement s'appelle un raisonnement par l'absurde.

#

Exemple 11 : Factoriser, si possible, $f(x) = 4x^2 + 19x - 5$

$f(x) = 4x^2 + 19x - 5$ est une fonction polynôme du second degré.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 19^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 361 + 80 = 441 = 21^2 > 0$$

donc f est factorisable sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

$$\text{avec } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-19 - 21}{8} = \frac{-40}{8} = -5 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-19 + 21}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Conclusion : $f(x) = 4(x + 5)(x - \frac{1}{4})$.

2. Signe d'un polynôme du second degré

Propriété : Soit $ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$ alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de « a » à l'extérieur des racines et du signe de « $-a$ » à l'intérieur des racines
- Si $\Delta = 0$ alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de « a » pour tout réel $x \neq \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$ alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de « a » pour tout réel x .

Démonstration :

Comme $a \neq 0$, on a

- Si $\Delta > 0$ alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

On dresse le tableau de signes du produit $(x - x_1)(x - x_2)$. On suppose $x_1 < x_2$.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$(x-x_1)$	$-$	0	$+$	$+$	
$(x-x_2)$	$-$	$-$	0	$+$	
$(x-x_1)(x-x_2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$f(x)$ est du signe de a pour $x < x_1$ ou $x > x_2$ et du signe contraire de celui de a pour $x_1 < x < x_2$

- Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2$ avec $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

Un carré étant toujours positif ou nul, on déduit que $f(x)$ est du signe de a pour $x \neq x_0$.

- Si $\Delta < 0$ alors $f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$ est le produit de a par un réel strictement positif donc du signe de a pour tout réel x

#

Exemple 12 :

1. Déterminer le signe du polynôme $4x^2 + 19x - 5$

Nous avons vu à l'exercice précédent que $\Delta = 441 = 21^2 > 0$ et par conséquent f admet deux racines distinctes $x_1 = -5$ et $x_2 = \frac{1}{4}$ avec $a = 4 > 0$. On déduit que $f(x) = 4x^2 + 19x - 5$ est

strictement positive à l'extérieur de ses racines c'est à dire sur $] -\infty; -5[\cup] \frac{1}{4}; +\infty[$, strictement négative à l'intérieur de ses racines c'est à dire sur $] -5; \frac{1}{4}[$ et s'annule en $x_1 = -5$ et $x_2 = \frac{1}{4}$.

2. Résoudre de l'inéquation du second degré $-x^2 + x + 6 > 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 1 + 24 = 25 = 5^2 > 0$ donc le polynôme du second degré

$g(x) = -x^2 + x + 6$ admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 5}{(-2)} = \frac{-6}{(-2)} = 3$ et

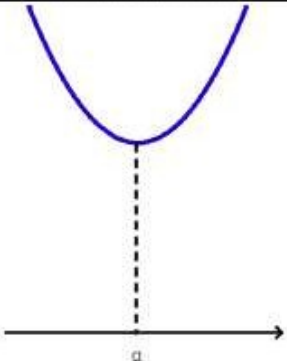
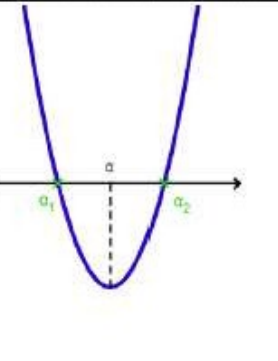
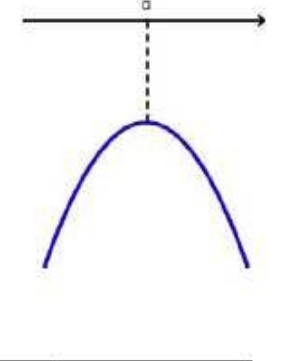
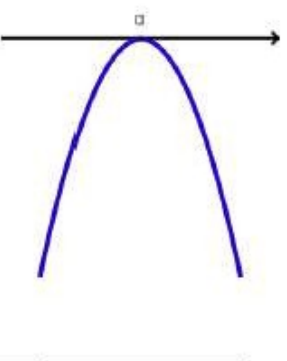
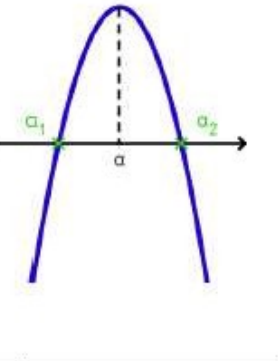
$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 5}{(-2)} = \frac{4}{(-2)} = -2$. Or $a = -1$ donc $g(x) = -x^2 + x + 6$ est strictement

négative à l'extérieur de ses racines c'est et strictement positive à l'intérieur de ses racines.

On déduit que $-x^2 + x + 6 > 0$ pour $x \in] -2[\cup] 3; +\infty[$.

V. Tableau récapitulatif

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$																									
Solutions de l'équation $P(x)=0$	Pas de solution	Une seule solution : $\alpha = -\frac{b}{2a}$	Deux solutions : $\alpha_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\alpha_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$																									
Factorisation de $P(x)$	Pas de factorisation	$P(x) = a(x - \alpha)^2$	$P(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$																									
$a > 0$																												
Position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses																												
Signe de $P(x)$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td colspan="2">+</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$P(x)$	+		<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x	$-\infty$	α	$+\infty$	$P(x)$	+	0	+	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>α_1</td><td>α_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x	$-\infty$	α_1	α_2	$+\infty$	$P(x)$	+	0	-	0	+
x	$-\infty$	$+\infty$																										
$P(x)$	+																											
x	$-\infty$	α	$+\infty$																									
$P(x)$	+	0	+																									
x	$-\infty$	α_1	α_2	$+\infty$																								
$P(x)$	+	0	-	0	+																							
$a < 0$																												
Position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses																												
Signe de $P(x)$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td colspan="2">-</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$P(x)$	-		<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x	$-\infty$	α	$+\infty$	$P(x)$	-	0	-	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>α_1</td><td>α_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x	$-\infty$	α_1	α_2	$+\infty$	$P(x)$	-	0	+	0	-
x	$-\infty$	$+\infty$																										
$P(x)$	-																											
x	$-\infty$	α	$+\infty$																									
$P(x)$	-	0	-																									
x	$-\infty$	α_1	α_2	$+\infty$																								
$P(x)$	-	0	+	0	-																							