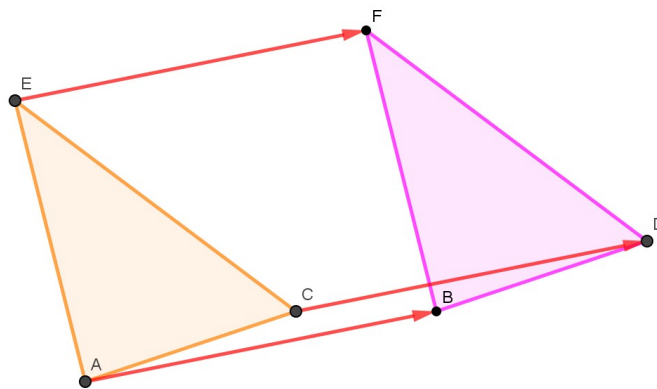


Chapitre 10 : Vecteurs

I. Translation et vecteur

Sur la figure ci-dessous, D et F sont les images respectives des points C et D par la **translation qui transforme A en B**.

La flèche allant de A vers B indique la **direction, le sens et la longueur** du déplacement effectué pour aller du point A au point B.



Définition : Soit A et B deux points distincts du plan.
La translation qui transforme A en B est appelée translation de **vecteur** \vec{AB} .

Propriété : Lorsque A et B sont deux points distincts, le **vecteur** \vec{AB} est caractérisé par :

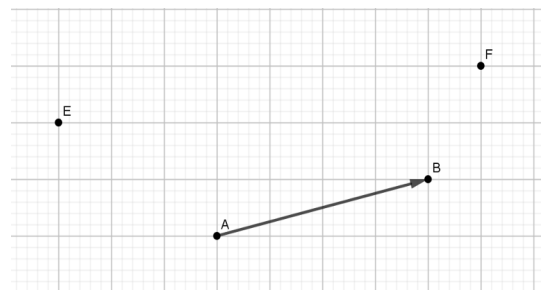
- une **direction** : celle de la droite (AB)
- un **sens** : de A vers B
- une **longueur** : la longueur AB appelée **norme du vecteur** \vec{AB} et notée $\|\vec{AB}\|$

Histoire :

- le terme « vecteur » est dû au mathématicien irlandais William Rowan Hamilton (1805-1865)
- la notation \vec{AB} ne sera adopté que vers 1960

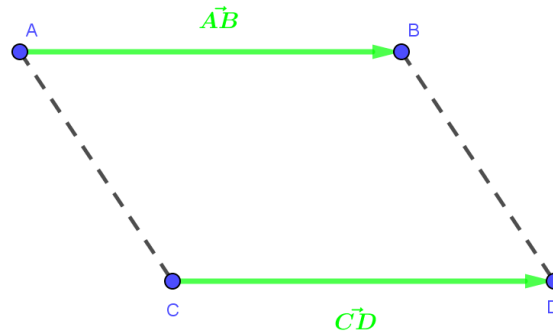
Exercice 1

Construire les points U et V tels que $\vec{EU} = \vec{VF} = \vec{AB}$.



II. Vecteurs égaux

Définition : Dire que deux vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont égaux signifie que le point D est l'image du point C par la **translation** de vecteur \vec{AB} .



Exercice 2

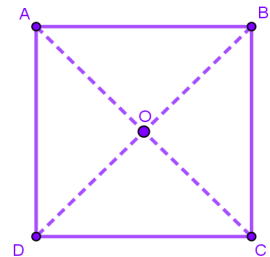
Dans le carré ABCD de centre O ci-contre, compléter les égalités suivantes :

$$\vec{AB} =$$

$$\vec{CB} =$$

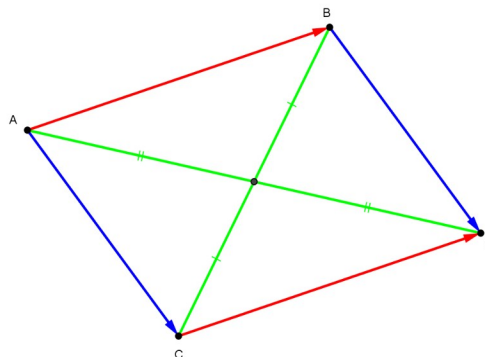
$$\vec{OC} =$$

$$\vec{DO} =$$



Propriétés : A, B, C et D désignent quatre points du plan.

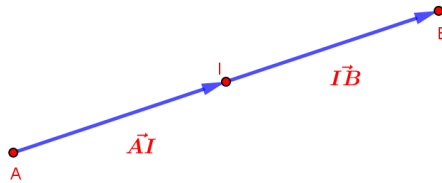
- $\vec{AB} = \vec{CD}$ si, et seulement si, ABDC est un **parallélogramme**.
- $\vec{AB} = \vec{CD}$ si, et seulement si, [AD] et [BC] ont le **même milieu**.
- $\vec{AB} = \vec{CD}$ si, et seulement si, les vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} ont **même direction, même sens et même longueur**.



Remarques :

- Attention à l'ordre des points entre les vecteurs égaux et le nom du parallélogramme.
- Le parallélogramme $ABDC$ peut être aplati.

Propriété : I est le milieu de $[AB]$ si, et seulement si $\vec{AI} = \vec{IB}$.



Méthode - Construire l'image d'un point M par la translation de vecteur \vec{AB}

- Pour cela on place le point I milieu de $[BM]$ puis on construit l'image du point A par la symétrie ce centre I.
- Le vecteur \vec{AB} est caractérisé par, sa direction (la droite (AB)), son sens (de A vers B) et sa norme (la longueur AB).
- Construire le point M' image du point M par la translation de vecteur \vec{AB} revient à tracer le parallélogramme $ABM'M$.

Par la symétrie de centre I	Par le parallélogramme $ABM'M$

Exercice 3 :

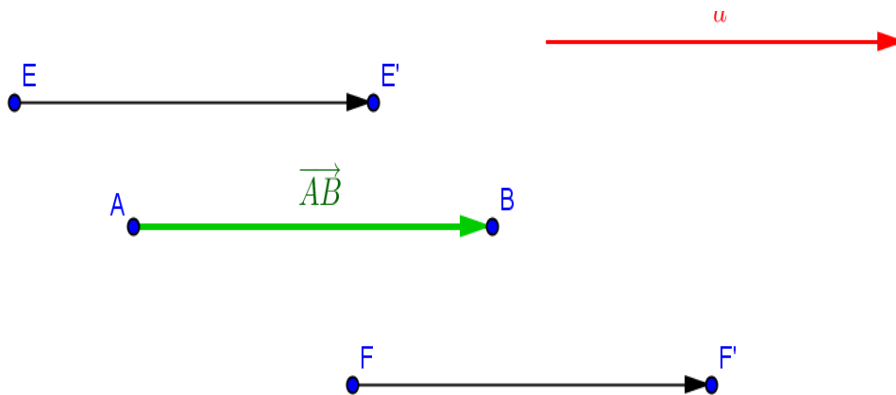
A, B, O et O' sont quatre points distincts. C et D sont les symétriques respectifs de A et B par rapport à O. E et F sont les symétriques respectifs de A et B par rapport à O'.

1. Faire une figure
2. Démontrer que DCEF est un parallélogramme.

III. Représentants d'un même vecteur et vecteur nul

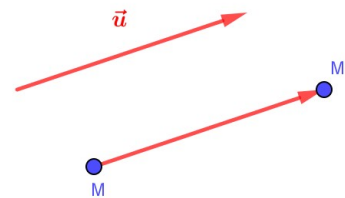
Étant donné deux points A et B , on peut construire une infinité de parallélogrammes dont un côté est le segment $[AB]$. On obtient ainsi une **infinité** de vecteurs égaux à \vec{AB} .

Tous ces vecteurs sont donc des **représentants** d'un même vecteur, qu'on note souvent à l'aide d'une lettre, \vec{u} . Ils ont tous même direction, même sens et même longueur.



Définition : Un vecteur non nul \vec{u} est défini par **une direction** (une droite (d)), **un sens** (donné par la flèche) et **une norme** notée $\|\vec{u}\|$ (sa longueur)

Propriété : L'image du point M par la translation de vecteur \vec{u} est le point M' tel que $\vec{MM'} = \vec{u}$.



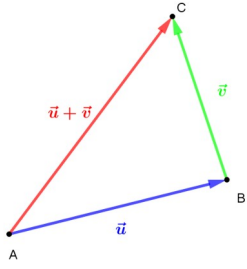
Définition : Lorsque les points A et B sont confondus, on appelle translation de vecteur \vec{AA} la translation qui transforme le point A en A .
Le vecteur \vec{AA} est alors appelé **vecteur nul** et noté $\vec{0}$.

Remarque : le vecteur nul n'a pas de direction, n'a pas de sens et sa norme est égale à 0.

IV. Somme de vecteurs

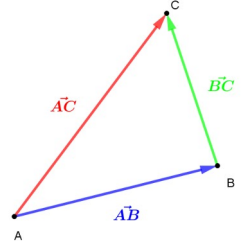
1. Somme de deux vecteurs

Définition : Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan.
 En enchaînant la translation de vecteur \vec{u} puis celle de vecteur \vec{v} , on obtient un nouvelle translation dont le vecteur est associé est noté $\vec{u} + \vec{v}$



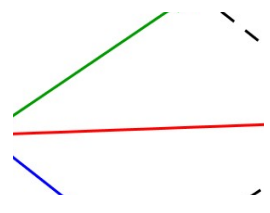
2. Relation de Chasles

Propriété : Pour tous les points A, B et C du plan on a $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$



3. Règle du parallélogramme

Propriété : Pour tous les points A, B, C et D du plan on a :

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC} \iff \text{ABDC est un parallélogramme}$$


Remarque : la relation de Chasles et la règle du parallélogramme permettent de construire un représentant d'origine A de la somme de deux vecteurs.

4. Additions de vecteurs

Additions de vecteurs		
$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$	$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$	$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

5. Vecteur opposé et différence de deux vecteurs

D'après la relation de Chasles, on a $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$.

Définition : A et B désignent deux points du plan.

Le vecteur \vec{BA} est appelé **vecteur opposé** du vecteur \vec{AB} et noté $-\vec{AB}$.

Les vecteurs \vec{AB} et $-\vec{AB}$ ont **même direction, même norme mais sont de sens contraires**.

Définitions : \vec{u} et \vec{v} désignent deux vecteurs.

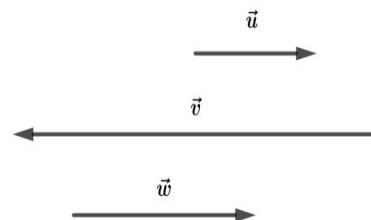
- L'**opposé** du vecteur \vec{u} est le vecteur noté $-\vec{u}$ tel que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
- La **différence** des vecteurs \vec{u} et \vec{v} notée $\vec{u} - \vec{v}$ est le vecteur $\vec{u} + (-\vec{v})$

V. Produit d'un vecteur par un réel

Définition : Au vecteur \vec{u} et au réel k , on peut associer un vecteur, noté $k\vec{u}$ appelé produit du vecteur \vec{u} par le réel k , défini de la façon suivante :

- si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $k \neq 0$
 - $k\vec{u}$ et \vec{u} ont même direction
 - $k\vec{u}$ et \vec{u} ont même sens si $k > 0$ et sont de sens contraires si $k < 0$
 - $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$
- si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$ alors $k\vec{u} = \vec{0}$

Exercice 4 : Compléter $\vec{v} = \dots \vec{u}$ et $\vec{w} = \dots \vec{u}$

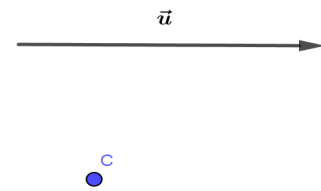


Règles de calculs : k et k' désignent deux nombres réels, \vec{u} et \vec{v} désignent deux vecteurs. On a :

- $k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow (k=0) \text{ ou } (\vec{u} = \vec{0})$
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$
- $(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $1\vec{u} = \vec{u}$
- $-1\vec{u} = -\vec{u}$

Exercice 5

Construire les vecteurs d'origine C égaux à $0,5\vec{u}$ et $-2\vec{u}$



Exercice 6

Construire un triangle RST et placer les points U et V tels que $\vec{RU} = 2\vec{SR}$ et $\vec{VT} = \frac{3}{4}\vec{TS}$

VI. Géométrie repérée

1. Base (\vec{i}, \vec{j}) du plan

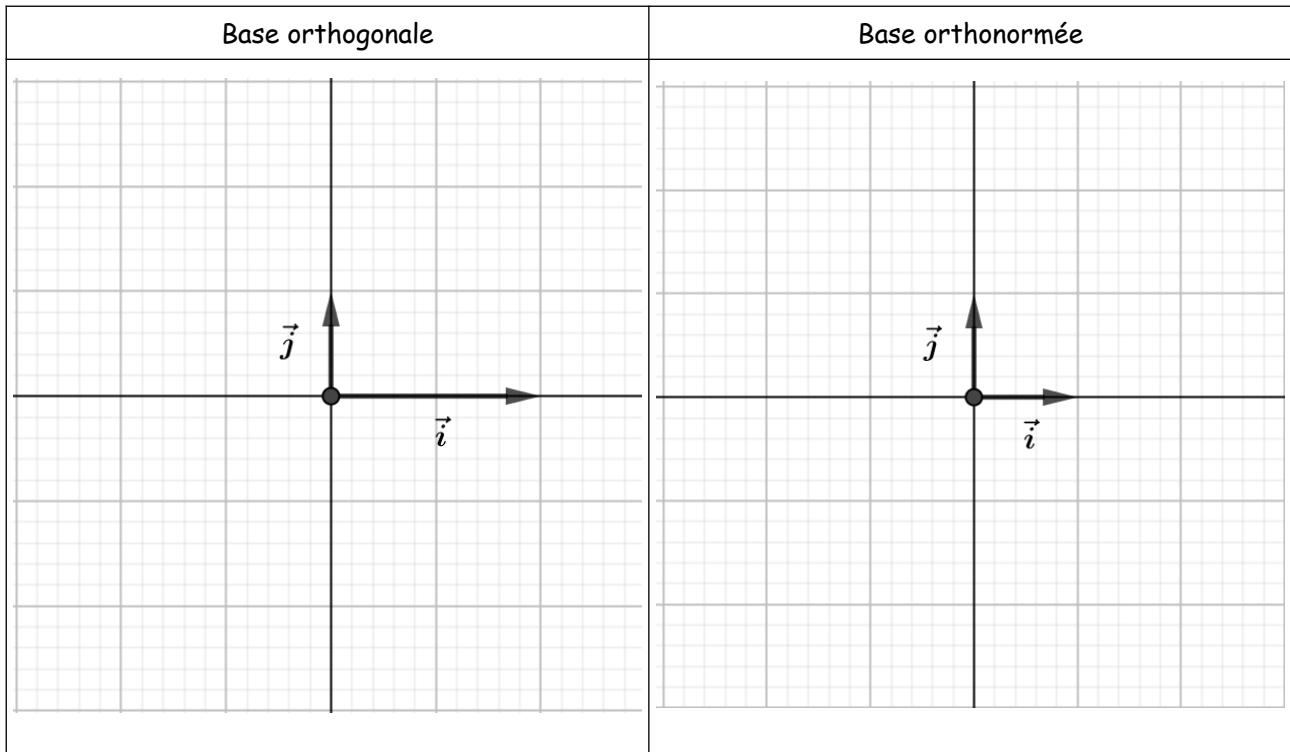
Définition : Une **base de vecteurs** du plan est un couple de deux vecteurs non nuls (\vec{i}, \vec{j}) n'ayant pas la même direction.

Définition : Deux vecteurs (\vec{i}, \vec{j}) sont dits **orthogonaux** lorsque leurs **directions sont perpendiculaires**.

Définition : Soit (\vec{i}, \vec{j}) une base du plan.

- Une base est dite **orthogonale** si les vecteurs (\vec{i}, \vec{j}) sont **orthogonaux**.
- Une base est dite **orthonormée** si la base (\vec{i}, \vec{j}) est **orthogonale** et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$.

Exemple :



Remarque : soit ABCD un carré de côté 1 alors la base (\vec{AB}, \vec{AD}) est une base orthonormée.

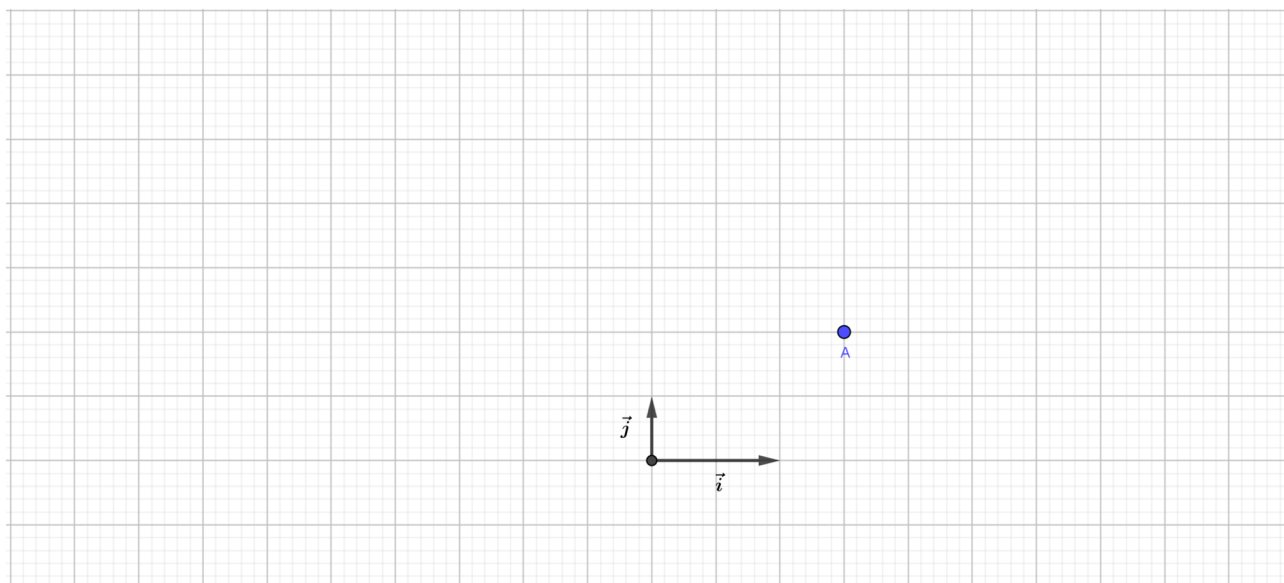
2. Coordonnées d'un vecteur dans une base du plan

Théorème et définition : Soit (\vec{i}, \vec{j}) une base du plan et \vec{u} un vecteur du plan.
 Il existe un unique couple $(x; y)$ de réels tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. On note $\vec{u}(x; y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Remarque : le vecteur nul a pour coordonnées (0;0).

Exercice 7

Dans la base (\vec{i}, \vec{j}) , construire les vecteurs $\vec{u}(2;3); \vec{v}(-1;-1); \vec{w}(-4;1)$ et $\vec{x}(-5;-2)$ d'origine A.



Compléter les égalités suivantes :

$$\vec{u} = \dots \vec{i} + \dots \vec{j}$$

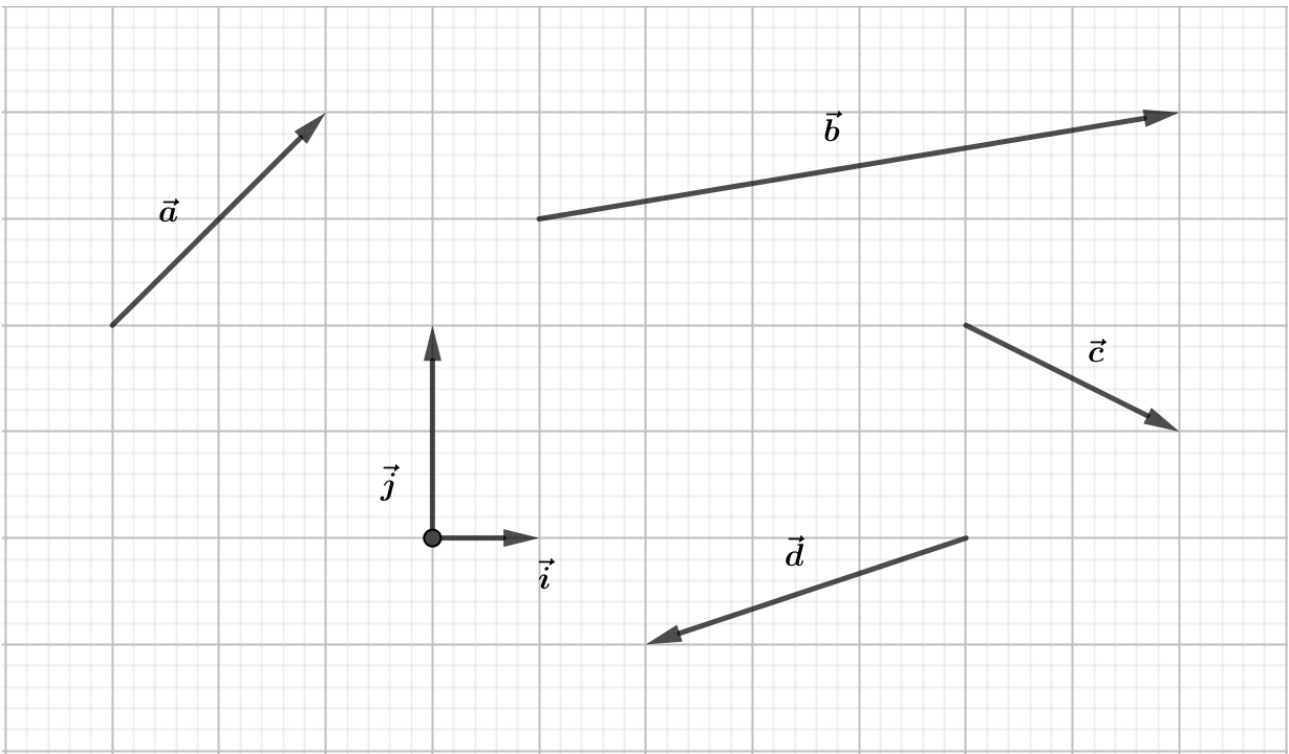
$$\vec{v} = \dots \vec{i} + \dots \vec{j}$$

$$\vec{w} = \dots \vec{i} + \dots \vec{j}$$

$$\vec{x} = \dots \vec{i} + \dots \vec{j}$$

Exercice 8

Déterminer les coordonnées des vecteurs \vec{a} ; \vec{b} ; \vec{c} et \vec{d} dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .



Compléter les égalités suivantes :

$$\vec{a} = \dots \vec{i} + \dots \vec{j} \quad \vec{b} = \dots \vec{i} + \dots \vec{j} \quad \vec{c} = \dots \vec{i} + \dots \vec{j} \quad \vec{d} = \dots \vec{i} + \dots \vec{j}$$

Propriété : deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont **égaux** si, et seulement si, $x = x'$ et $y = y'$

Remarque : cette propriété est équivalente à dire que deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coordonnées.

3. Coordonnées d'un vecteur dans un repère du plan

Définition : Un repère du plan est la donnée d'un point O du plan et d'une base (\vec{i}, \vec{j}) .
 O est appelé origine du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Théorème et définition : Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan et A un point du plan.
 Il existe un unique couple $(x_A; y_A)$ de réels tel que $\vec{OA} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j}$.
 x_A et y_A sont appelés les **coordonnées** de A dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 x_A est l'**abscisse** de A et y_A est l'**ordonnée** de A.
 On écrit $A(x_A; y_A)$.

Remarques :

- les coordonnées de A dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sont les coordonnées du vecteur \vec{OA} dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .
- dans la base (\vec{i}, \vec{j}) , \vec{i} a pour coordonnées $(1; 0)$ et \vec{j} a pour coordonnées $(0; 1)$.
- Le vecteur nul $\vec{0}$ a pour coordonnées $(0; 0)$

Propriété : Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 Les coordonnées du vecteur \vec{AB} sont $(x_B - x_A; y_B - y_A)$. On note $\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

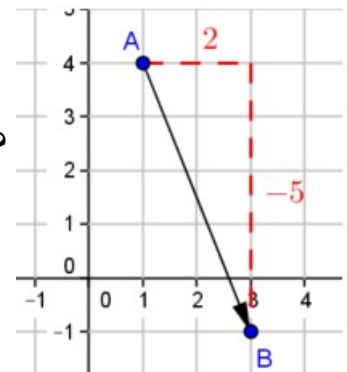
Démonstration :

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_B \vec{i} + y_B \vec{j}) - (x_A \vec{i} + y_A \vec{j}) = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j} \quad \#$$

Exercice 9

Dans un repère du plan, on considère les points $A(1; 4)$ et $B(3; -1)$.

1. Par lecture graphique, déterminer les coordonnées du vecteur \vec{AB} ?
2. Retrouver votre résultat par le calcul.



Méthode - Déterminer les coordonnées d'un point à l'aide d'une égalité vectorielle

Dans le plan, on considère le point $A(1; -2)$ et le vecteur $\vec{u}(3; -2)$.

On cherche à déterminer les coordonnées de M telles que $\vec{AM} = \vec{u}$

On note $M(x; y)$. On a alors $\vec{AM}(x-1; y+2)$.

$$\vec{AM} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=3 \\ y+2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow M(4; -4)$$

Exercice 10

On considère le point $B(-2; 3)$ et le vecteur $\vec{u}(5; -1)$.

Déterminer les coordonnées du point C tel que $\vec{u} = \vec{BC}$.

4. Coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ et de $k\vec{u}$

Propriété : Dans le plan muni d'un repère, on considère les vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ alors le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x+x'; y+y')$

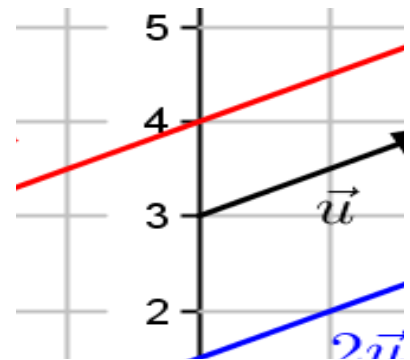
Exercice 11

On considère $\vec{AB}(-3;5)$ et $\vec{BC}(1;-3)$. Déterminer les coordonnées de \vec{AC} .

Propriété : Dans le plan muni d'un repère, on considère le vecteur $\vec{u}(x; y)$ et le réel k . Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx; ky)$.

Exercice 12

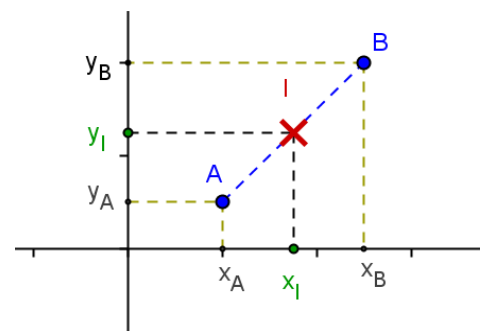
A partir de la figure ci-contre, déterminer les coordonnées des vecteurs $-3\vec{u}$ et $2\vec{u}$



5. Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété : Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$



Démonstration :

I milieu de [A] si et seulement si $\vec{AI} = \vec{IB}$.

$$\vec{AI} = \vec{IB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I - x_A = x_B - x_I \\ y_I - y_A = y_B - y_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_I = x_B + x_A \\ 2y_I = y_B + y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \quad \#$$

Remarques :

- Les coordonnées du milieu sont donc les moyennes des abscisses et des ordonnées des deux points.
- Ces formules sont valables dans tous les repères du plan.

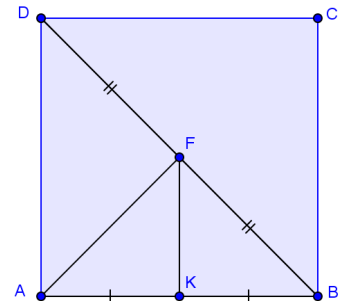
Exercice 13

Par le calcul, déterminer les coordonnées de M milieu des segments A(-2 ; 2) et B(6 ; 4).

Exercice 14

Le quadrilatère ABCD est un carré de côté 1.

1. Quel est la nature du repère (A ; B, D) ? Justifier.
2. Dans le repère (A ; B,D), déterminer les coordonnées de tous les points de la figure.

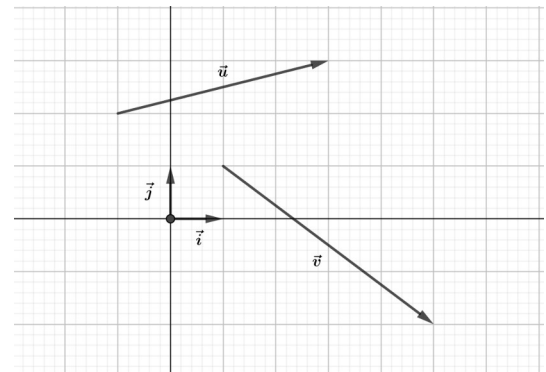


6. Norme d'un vecteur dans une base orthonormée

Propriété : Soit $\vec{u}(x; y)$ un vecteur dans une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) . On a $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exercice 15

Dans la base (\vec{i}, \vec{j}) ci-contre, lire les coordonnées des vecteurs \vec{u} et \vec{v} puis calculer leur norme.

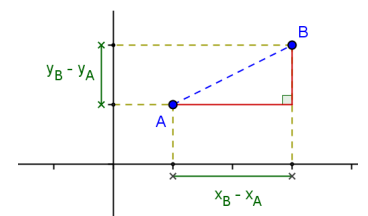


7. Distance entre deux points dans un repère orthonormé

Propriété : Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

- AB désigne la distance entre les deux points A et B
- AB désigne aussi la longueur du segment [AB]



Attention : cette formule est fautive dans un repère non orthonormé !

Exercice 16

Dans un repère orthonormé, déterminer la valeur exacte de la longueur du segment $[AB]$ lorsque $A(1 ; 2)$ et $B(3 ; 5)$ puis donner une valeur approchée par défaut à 0,1 près.

VII. Colinéarité de deux vecteurs

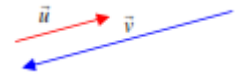
1. Vecteurs colinéaires

Définition : deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} sont **colinéaires** s'il existe un nombre non nul k tel que

$$\vec{v} = k\vec{u}$$

Remarques :

- deux vecteurs colinéaires sont donc deux vecteurs qui ont la même direction mais pas nécessairement le même sens ni la même intensité.
- Par convention le vecteur nul est colinéaire à tous les autres vecteurs.



Définition : Soit $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs dans une base (\vec{i}, \vec{j}) .

On appelle **déterminant** des vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$, le nombre défini par :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) \text{ ou } \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x \times y' - x' \times y$$

Propriété : Soit $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs dans une base (\vec{i}, \vec{j}) .

- $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont **colinéaires** si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$
- $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont **colinéaires** si et seulement si $x \times y' - x' \times y = 0$

Démonstration exigible au programme

- On suppose \vec{u} et \vec{v} colinéaires.
 - 1^{er} cas : \vec{u} et \vec{v} sont tous les deux non nuls.
Il existe un réel $k \neq 0$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ donc $x' = k \times x$ et $y' = k \times y$.
On déduit que $x \times y' - x' \times y = x \times (ky) - (kx) \times y = k(xy - xy) = 0$

- 2ème cas : $\vec{u}=\vec{0}$ alors $x=0$ et $y=0$ donc $xy'-x'y=0\times y'-0\times x'=0$
- 3ème cas : $\vec{v}=\vec{0}$ alors $x'=0$ et $y'=0$ donc $xy'-x'y=x\times 0-0\times y=0$
- Réciproquement, supposons $x\times y'-x'\times y=0$ alors :
 - 1^{er} cas : \vec{u} et \vec{v} sont tous les deux non nuls.
Comme \vec{u} est non nul alors l'une de ses coordonnées est non nulle, par exemple x .
Posons $k=\frac{x'}{x}$ alors $x'=kx$ donc $x\times y'-kx\times y=0$ donc $x\times y'-x'\times y=0$ donc $y'-ky=0$ car $x\neq 0$ donc $y'=ky$.
On déduit que $x'=kx$ et $y'=ky$ donc $\vec{v}=k\vec{u}$.
 - 2ème cas : l'un des deux vecteurs est nul
Or le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur donc \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires. #

Exercice 17

Dire si dans chacun des cas suivants, les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires ou pas

$$\vec{u}(5;2) \text{ et } \vec{v}(35;14)$$

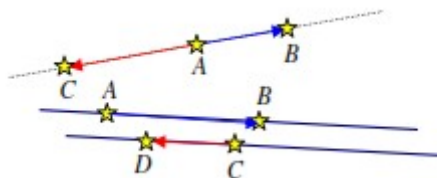
$$\vec{u}(16;3) \text{ et } \vec{v}(49;10)$$

$$\vec{u}(20;6) \text{ et } \vec{v}(30;9)$$

2. Droites parallèles et points alignés

Propriétés :

- Les points A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont **colinéaires**.
- Les droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont **colinéaires**.



Méthode - Montrer que trois points sont alignés

On considère les points $A(1 ; 2)$, $B(-2 ; 0)$ et $C(7 ; 6)$.

$$\vec{AB}(-2-1; 0-2) \text{ donc } \vec{AB}(-3; -2) \text{ et } \vec{AC}(7-1; 6-2) \text{ donc } \vec{AC}(6; 4)$$

On constate que $\vec{AC} = -2\vec{AB}$ donc \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires donc les points A , B et C sont alignés.

Exercice 18

Dans un repère, on donne les points $A\left(\frac{-7}{2}; \frac{-1}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ et $C\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Démontrer que les points A , B et C sont alignés.

2. Vecteur et milieu d'un segment

Propriété : I est le milieu de $[AB]$ si, et seulement si, une des égalités suivantes est vraie :

$$\vec{AI} = \vec{IB}$$

$$\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$$

$$\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$$