

Épreuve Anticipée de Mathématiques

Voie Générale - Candidats suivant l'enseignement de spécialité mathématique
Sujet Analogie 1 - Corrigé

Durée : 2 heures

Consigne : L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES - QCM (6 pts)

Question 1

Le double de 5 est $2 \times 5 = 10$. L'inverse de ce résultat est $\frac{1}{10}$.

Réponse correcte : b

Question 2

On remplace les variables par leurs valeurs respectives dans $F = a + \frac{b}{cd}$:

$$F = \frac{1}{2} + \frac{3}{4 \times \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{2} + \frac{3}{-1} = \frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{2} - \frac{6}{2} = -\frac{5}{2}$$

Réponse correcte : a

Question 3

Un coefficient multiplicateur de 0,975 correspond à une évolution en baisse. On calcule le taux de variation associé : $t = 0,975 - 1 = -0,025$, soit une baisse de 2,5%.

Réponse correcte : a

Question 4

Une hausse de 10% correspond à un coefficient $1 + 0,10 = 1,1$. Une baisse de 10% correspond à un coefficient $1 - 0,10 = 0,9$.

À l'issue des deux variations, le coefficient global est $1,1 \times 0,9 = 0,99$. Comme $0,99 < 1$, le nouveau prix P_1 est strictement inférieur au prix initial P ($P_1 = 0,99P$).

Réponse correcte : c

Question 5

La somme des probabilités d'une loi de probabilité doit être égale à 1. Ainsi :

$$0,5 + \frac{1}{6} + 0,2 + x = 1 \iff \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + x = 1$$

Mettons tout sur le dénominateur commun 30 :

$$\frac{15}{30} + \frac{5}{30} + \frac{6}{30} + x = 1 \iff \frac{26}{30} + x = 1 \iff x = 1 - \frac{26}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

Réponse correcte : a

Question 6

Mettons les fractions au même dénominateur :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y+x}{xy}$$

On sait que cette expression est égale à $\frac{1}{u}$. En prenant l'inverse des deux membres, on obtient :

$$u = \frac{xy}{x+y}$$

Réponse correcte : a

Question 7

L'inéquation $x^2 \geq 10$ équivaut à dire que la distance de x à l'origine élevée au carré est supérieure ou égale à 10. En passant à la racine carrée, cela se traduit par $|x| \geq \sqrt{10}$, soit $x \leq -\sqrt{10}$ ou $x \geq \sqrt{10}$.

Réponse correcte : b

Question 8

Graphiquement, la droite coupe l'axe des ordonnées en $(0; 2)$ et l'axe des abscisses en $(3; 0)$. Son coefficient directeur est $a = \frac{0-2}{3-0} = -\frac{2}{3}$ et son ordonnée à l'origine est $b = 2$. Son équation réduite est donc $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

En basculant les termes du même côté, on obtient : $\frac{2}{3}x + y - 2 = 0$. En divisant l'ensemble des membres par 2, on retrouve la formulation de la proposition d : $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} - 1 = 0$.

Réponse correcte : d

Question 9

Développons et simplifions les expressions :

— $f_1(x) = x^2 - (1 - 2x + x^2) = 2x - 1$. C'est une fonction de la forme $ax + b$, donc affine.

— $f_2(x) = \frac{1}{2}x - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Elle est directement sous la forme $ax + b$, donc affine.

— $f_3(x) = \frac{5}{0,7} - \frac{2}{2,1}x$. C'est également une fonction de la forme $ax + b$, donc affine.

Les trois fonctions sont donc toutes affines.

Réponse correcte : b

Question 10

La courbe représentée est une parabole tournée vers le bas (donc le coefficient de x^2 est négatif, $a < 0$) et dont le sommet est situé sur l'axe des ordonnées au point $(0; 10)$. L'expression est donc de la forme $f(x) = -x^2 + 10$.

Réponse correcte : c

Question 11

L'inéquation $x \times f(x) > 0$ signifie que l'abscisse x et l'ordonnée $f(x)$ d'un point de la courbe doivent être de même signe (règle des signes d'un produit) :

— Soit $x > 0$ et $f(x) > 0$ (le point se situe dans le quadrant supérieur droit). C'est le cas du point S .

— Soit $x < 0$ et $f(x) < 0$ (le point se situe dans le quadrant inférieur gauche). C'est le cas du point A .

Les points de la courbe qui vérifient cette inéquation sont donc A et S .

Réponse correcte : c

Question 12

Calculons la moyenne pondérée m en fonction de x :

$$m = \frac{10 \times 1 + 8 \times 2 + 16 \times x}{1 + 2 + x} = \frac{10 + 16 + 16x}{3 + x} = \frac{26 + 16x}{3 + x}$$

On cherche x tel que $m = 15$:

$$\frac{26 + 16x}{3 + x} = 15 \iff 26 + 16x = 15(3 + x) \iff 26 + 16x = 45 + 15x$$

$$16x - 15x = 45 - 26 \iff x = 19$$

Réponse correcte : d

DEUXIÈME PARTIE

Exercice 1 (7 points)

1. (a) Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées des points sont $O(0; 0)$, $I(5; 2)$ et $C(0; 5)$. On en déduit directement les coordonnées des vecteurs :

$$\vec{OI} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{OC} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- (b) Le repère étant orthonormé, on utilise l'expression analytique du produit scalaire :

$$\vec{OI} \cdot \vec{OC} = x_{\vec{OI}} \cdot x_{\vec{OC}} + y_{\vec{OI}} \cdot y_{\vec{OC}} = 5 \times 0 + 2 \times 5 = 10$$

2. (a) Par définition, H est le projeté orthogonal de C sur la droite (OI) . Le produit scalaire $\vec{OI} \cdot \vec{OC}$ est donc égal au produit scalaire $\vec{OI} \cdot \vec{OH}$. Les vecteurs \vec{OI} et \vec{OH} étant colinéaires et de même sens (le projeté de $C(0; 5)$ sur la droite se fait vers la section positive de la droite), on a :

$$\vec{OI} \cdot \vec{OC} = OH \times OI$$

- (b) Calculons la distance exacte OI :

$$OI = \sqrt{(x_I - x_O)^2 + (y_I - y_O)^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

- (c) D'après les questions précédentes, on a $OH \times OI = 10$. On en déduit :

$$OH = \frac{10}{OI} = \frac{10}{\sqrt{29}} \approx 1,86$$

3. (a) La droite (OI) passe par l'origine $O(0; 0)$ et a pour vecteur directeur $\vec{OI} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. Un point $M(x; y)$ appartient à (OI) si et seulement si $\det(\vec{OM}, \vec{OI}) = 0$:

$$x \times 2 - y \times 5 = 0 \iff 2x - 5y = 0$$

L'équation cartésienne de la droite (OI) est donc $2x - 5y = 0$.

- (b) Le cercle \mathcal{C} a pour centre $K(2, 5; 2, 5)$ et pour rayon $R = 1$. Un point $M(x; y)$ appartient à \mathcal{C} si et seulement si $KM^2 = R^2$:

$$(x - 2, 5)^2 + (y - 2, 5)^2 = 1^2$$

Développons cette expression :

$$(x^2 - 5x + 6, 25) + (y^2 - 5y + 6, 25) = 1$$

$$x^2 + y^2 - 5x - 5y + 12, 5 - 1 = 0 \iff x^2 + y^2 - 5x - 5y + 11, 5 = 0$$

L'équation est bien validée.

- (c) Testons les coordonnées du point $P(2; 3, 5)$ dans l'équation du cercle :

$$2^2 + 3, 5^2 - 5(2) - 5(3, 5) + 11, 5 = 4 + 12, 25 - 10 - 17, 5 + 11, 5 = 27, 75 - 27, 5 = 0, 25$$

Comme $0, 25 \neq 0$, le point $P(2; 3, 5)$ **n'appartient pas** au cercle \mathcal{C} .

Exercice 2 (7 points)

Partie A

$$g(x) = x^2 - 6x + 5$$

1. g est un polynôme du second degré. Calculons son discriminant Δ :

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 36 - 20 = 16 = 4^2$$

$\Delta > 0$, l'équation $g(x) = 0$ possède deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-6) - 4}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-6) + 4}{2 \times 1} = \frac{10}{2} = 5$$

Le coefficient principal étant $a = 1 > 0$, $g(x)$ est positive à l'extérieur des racines et négative entre elles.

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$		
Signe de $g(x)$		+	0	-	0	+

2. Exprimons les ordonnées des points A_n et A_{n+1} :

$$y_n = g(n) = n^2 - 6n + 5$$

$$y_{n+1} = g(n+1) = (n+1)^2 - 6(n+1) + 5 = n^2 + 2n + 1 - 6n - 6 + 5 = n^2 - 4n$$

Le coefficient directeur a_n de la droite $(A_n A_{n+1})$ est donné par :

$$a_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{(n+1) - n} = \frac{(n^2 - 4n) - (n^2 - 6n + 5)}{1} = n^2 - 4n - n^2 + 6n - 5 = 2n - 5$$

On a bien démontré que $a_n = 2n - 5$.

3. On observe que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n = [2(n+1) - 5] - (2n - 5) = 2$. La différence entre deux termes consécutifs est constante. La suite (a_n) est donc une **suite arithmétique** de raison $r = 2$ et de premier terme $a_0 = -5$.

Partie B

$$f(x) = x - 6 + \frac{5}{x} \quad \text{sur } [0, 5; 10]$$

1. Mettons l'expression de $f(x)$ sous le même dénominateur x :

$$f(x) = \frac{x \times x}{x} - \frac{6 \times x}{x} + \frac{5}{x} = \frac{x^2 - 6x + 5}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

Pour tout $x \in [0, 5; 10]$, on a bien $f(x) = \frac{g(x)}{x}$.

2. La position relative de la courbe de f par rapport à l'axe des abscisses est donnée par le signe de $f(x)$. Comme $x \in [0, 5; 10]$, le dénominateur x est strictement positif. Le signe de $f(x)$ est donc exclusivement le même que celui de $g(x)$ étudié à la Partie A, restreint à l'intervalle $[0, 5; 10]$:
- Sur $[0, 5; 1]$, $g(x) \geq 0$, donc $f(x) \geq 0$: la courbe de f est **au-dessus** de l'axe des abscisses.
 - Sur $[1; 5]$, $g(x) \leq 0$, donc $f(x) \leq 0$: la courbe de f est **en dessous** de l'axe des abscisses.
 - Sur $[5; 10]$, $g(x) \geq 0$, donc $f(x) \geq 0$: la courbe de f est **au-dessus** de l'axe des abscisses.
3. Dérivons la fonction f membre à membre :

$$f'(x) = 1 - 0 - \frac{5}{x^2} = 1 - \frac{5}{x^2} = \frac{x^2 - 5}{x^2}$$

En utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ au numérateur avec $5 = (\sqrt{5})^2$, on obtient directement :

$$f'(x) = \frac{(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})}{x^2}$$

4. Étudions le signe de $f'(x)$ sur $[0, 5; 10]$. Le dénominateur x^2 et le facteur $(x + \sqrt{5})$ sont strictement positifs sur cet intervalle. Le signe de la dérivée dépend uniquement du facteur $(x - \sqrt{5})$.

$$x - \sqrt{5} = 0 \iff x = \sqrt{5} \quad (\text{avec } \sqrt{5} \approx 2,24 \in [0, 5; 10])$$

Calculons les valeurs remarquables pour le tableau :

- $f(0,5) = 0,5 - 6 + \frac{5}{0,5} = -5,5 + 10 = 4,5$
- $f(\sqrt{5}) = \sqrt{5} - 6 + \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 6 + \sqrt{5} = 2\sqrt{5} - 6 \approx -1,53$
- $f(10) = 10 - 6 + \frac{5}{10} = 4 + 0,5 = 4,5$

x	0,5	$\sqrt{5}$	10
$f'(x)$	—	0	+
Variations de f	4,5	$2\sqrt{5} - 6$	4,5