

Chapitre 12 : Équations de droites et systèmes

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

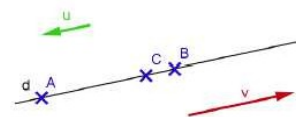
I. Équation cartésienne d'une droite

1. Vecteur directeur d'une droite

Définition : Soit d une droite du plan. On appelle **vecteur directeur** de d tout vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la **même direction** que la droite d .

Exemple :

- $\vec{AB}, \vec{AC}$ ou $\vec{BC}$ sont des vecteurs directeurs de d .
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont aussi des vecteurs directeurs de d .



Remarques :

- Le choix de deux points distincts quelconques de d définit un vecteur directeur de d .
- Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d alors tout vecteur (non nul) colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de d . Il existe donc une infinité de vecteurs directeurs d'une même droite.
- Le parallélisme de deux droites d et d' se traduit par le fait que tout vecteur directeur de l'une est vecteur directeur de l'autre.

Exemple : Une droite (d) passe par les points $A(-1;3)$ et $B(1;-1)$. (d) admet le vecteurs $\vec{AB}(2;-4)$ pour vecteur directeur.

Exercice 1 :

Soit (d_1) la droite passant par $A(-3;3)$ et $B(3;-1)$.

On considère les vecteurs $\vec{u}(3;-2)$, $\vec{v}(-0,75;0,5)$ et $\vec{w}(1;0,6)$.

1. Donner un vecteur directeur de (d_1)
2. Déterminer parmi les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ ceux qui sont directeurs de (d_1)

2. Équation cartésienne d'une droite

Propriété : Toute droite d du plan, rapporté à un repère, admet une équation dite **cartésienne** de la forme $ax + by + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $(a; b) \neq (0; 0)$.

Point Histoire : Cartésienne est dérivé de Cartesius, nom latin de Descartes et signifie « qui se rapporte à la doctrine de Descartes ».

René Descartes (1596-1650) fut un mathématicien, physicien et philosophe français auquel est attribué la célèbre expression « Je pense donc je suis » (Cogito, ergo sum). Reliant la géométrie et le calcul, il créa la géométrie analytique.

Remarque : $(a; b) \neq (0; 0)$ signifie qu'au moins un des deux réels a ou b est non nul.

Preuve exigible au programme :

Soit une droite (d) passant par un point $A(x_A; y_A)$ et de vecteur directeur (non nul) $\vec{u}(\alpha; \beta)$.

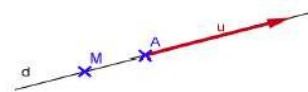
Pour tout point $M(x; y)$ du plan,

$$M \in (d) \Leftrightarrow \vec{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}$$

$$M \in (d) \Leftrightarrow (x - x_A) \times \beta - (y - y_A) \times \alpha = 0$$

$$M \in (d) \Leftrightarrow x \times \beta - x_A \times \beta - y \times \alpha + y_A \times \alpha = 0$$

$$M \in (d) \Leftrightarrow \beta x - \alpha y + (\alpha y_A - \beta x_A) = 0 \text{ et } (\beta; \alpha) \neq (0; 0) \text{ car } \vec{u} \neq \vec{0}$$



Conclusion : (d) a pour équation $ax + by + c = 0$ avec $a = \beta; b = -\alpha$ et $c = \alpha y_A - \beta x_A$

#

Remarque : ainsi, $\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de la droite d .

Exercice 2 :

- Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par $A(1;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-2;5)$.
- Déterminer une équation cartésienne de la droite (d') passant par $B(7;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(0;3)$.
- Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) avec $A(-5;4)$ et $B(-1;1)$.

Exemple : Soit (d) la droite passant par $A(2;3)$ et dirigée par $\vec{u}(2;5)$.

$$M \in d \Leftrightarrow \vec{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}$$

$$M(x; y) \in (d) \Leftrightarrow (x - 2) \times 5 - (y - 3) \times 2 = 0$$

$$M(x; y) \in (d) \Leftrightarrow 5x - 10 - 2y + 6 = 0$$

$$M(x; y) \in (d) \Leftrightarrow 5x - 2y - 4 = 0$$

Remarque : Une droite (d) admet une infinité d'équations cartésiennes.

En effet, si $ax + by + c = 0$ est une équation de d , alors pour tout réel k non nul, $kax + kby + kc = 0$ est également une équation de d .

Propriété réciproque : Le plan étant rapporté à un repère, l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant l'équation $ax + by + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $(a; b) \neq (0; 0)$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b; a)$.

Preuve exigible au programme :

Le plan est muni d'un repère. Notons $\Gamma = \{ M(x; y) \text{ tels que } ax + by + c = 0 \}$.

Comme $(a; b) \neq (0; 0)$, on peut supposer $a \neq 0$ par exemple.

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow ax + by + c = 0 \Leftrightarrow ax - (-by) + a\left(\frac{c}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow a\left(x + \frac{c}{a}\right) - (-by) = 0$$

Considérons le point $A\left(-\frac{c}{a}; 0\right)$ et le vecteur $\vec{u}(-b; a)$.

Le vecteur $\vec{AM}$ a pour coordonnées $\left(x + \frac{c}{a}; y\right)$ donc $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Γ est donc la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

#

Exemple : $3x + 4y - 10 = 0$ est l'équation d'une droite d admettant comme vecteur directeur $\vec{u}(-4;3)$

Cas particuliers :

- Si $a = 0$ alors les droites ont des équations de la forme $y = k$ et sont horizontales c'est à dire parallèles à l'axe des abscisses. Le vecteur $\vec{i}(1;0)$ est un vecteur directeur.
- Si $b = 0$ alors les droites ont des équations de la forme $x = k'$ et sont verticales c'est à dire parallèles à l'axe des ordonnées. Le vecteur $\vec{j}(0;1)$ est un vecteur directeur.

Exercice 3 :

Pour chacun des cas, déterminer un vecteur directeur de (d) :

$(d_1) : 5x - 2y + 1 = 0$	$(d_2) : x - 5 = 0$	$(d_3) : y = 2x + 3$
---------------------------	---------------------	----------------------

Propriété : Les droites d'équations $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$

Preuve :

Soit $(d) : ax + by + c = 0$ et $(d') : a'x + b'y + c' = 0$

Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}(-b;a)$ et un vecteur directeur de (d') est $\vec{u}'(-b';a')$.

(d) et (d') sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires si et seulement si $-ba' - a(-b') = 0$ si et seulement si $ab' - a'b = 0$ #

Exemple : Soit les droites $d : 2x - y + 3 = 0$, $d' : -4x + 2y + 1 = 0$ et $d'' : 2x + 3y + 2 = 0$.

- $\vec{u}(1;2)$, $\vec{v}(-2;-4)$ et $\vec{w}(-3;2)$ sont des vecteurs directeurs respectifs des droites d , d' et d''
- d et d' sont parallèles car $1 \times (-4) - 2 \times (-2) = -4 + 4 = 0$
- d et d'' ne sont pas parallèles car $1 \times 2 - 2 \times (-3) = 2 + 6 = 8 \neq 0$

II. Équation réduite et pente d'une droite

1. Équation réduite d'une droite

Propriété : Toute droite (d) non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $y = m x + p$. Cette équation est appelée **équation réduite** de la droite (d) .
Le vecteur $\vec{u}(1;m)$ est directeur de (d) .

Preuve : Pour $(a;b) \neq (0;0)$, on considère la droite (d) d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

- Pour $b \neq 0$, $ax + by + c = 0$ équivaut à $by = -a - c$ équivaut à $y = -a/b x - c/b$.
Ainsi, $ax + by + c = 0$ équivaut à $y = m x + p$ avec $m = -a/b$ et $p = -c/b$.

Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}(-b;a)$ et comme $b \neq 0$, $-\frac{1}{b}\vec{u}(1;-\frac{a}{b})$ est aussi

directeur de (d) soit $\vec{u}(1;m)$ avec $m = -\frac{a}{b}$.

Pour $x=0$, on obtient le point $(0;p)$ sur (d) et sur l'axe des ordonnées.

- Pour $b=0$, on ne peut pas exprimer y en fonction de x . La droite (d) est parallèle à l'axe des ordonnées. #

2. Pente d'une droite

Définition : Soit (d) la droite d'équation réduite $y = m x + p$.

Le nombre m est appelé pente (ou coefficient directeur) de la droite (d) et le nombre p est l'ordonnée à l'origine.

Exemple : $(d) : y = 3x - 5$ a pour coefficient directeur $m=3$ et pour ordonnée à l'origine $p=-5$ donc $A(0;-5)$ appartient à (d) .

Propriété : Dans un repère, soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points avec $x_A \neq x_B$.

La pente de la droite (AB) est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Preuve :

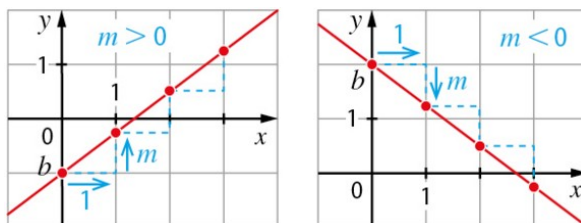
Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points avec $x_A \neq x_B$ donc (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc (d) admet une équation réduite de la forme $y = m x + p$.

Comme A appartient à (d) , on a $y_A = m x_A + p$.

Comme B appartient à (d) , on a $y_B = m x_B + p$.

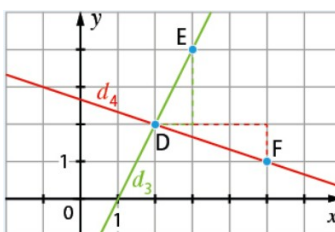
Par différence, on obtient $y_B - y_A = m x_B - m x_A = m(x_B - x_A)$ d'où $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ avec $x_B \neq x_A$ #

Interprétation graphique



Exercice 4 : Déterminer :

1. La pente m_1 de la droite d_1 passant par $A(-4;2)$ et $B(2;-3)$.
2. La pente m_2 de la droite d_2 dont une équation cartésienne est $6x - 4y + 2 = 0$
3. Les pentes des droites d_3 et d_4 tracées ci-dessous :



Exercice 5 : Déterminer l'équation réduite des droites :

1. d_1 passant par $A(2;3)$ et de pente -4
2. d_2 passant par $A(0;5)$ et de coefficient directeur 0

III. Systèmes linéaires d'équations

Définition : Un système de deux équations linéaires du premier degré à deux inconnues est de la forme $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$, avec a, b, c, a', b', c' réels et le couple $(x; y)$ des inconnues.

Définition : Résoudre ce système revient à déterminer tous les couples solutions, c'est à dire tous les couples vérifiant à la fois les deux équations du système.

Exemple : On considère le système $\begin{cases} 3x-2y=6 \\ -4x+5y=-1 \end{cases}$.

Vérifions que le couple $(4;3)$ est une solution de ce système. On a :

$3 \times 4 - 2 \times 3 = 12 - 6 = 6$ et $-4 \times 4 + 5 \times 3 = -16 + 15 = -1$ donc le couple $(4;3)$ est bien une solution du système.

IV. Méthode de résolution par substitution

Méthode : Cette méthode consiste à exprimer l'une des deux variables en fonction de l'autre dans l'une des deux équations puis à substituer cette valeur dans la seconde équation : la nouvelle équation obtenue est alors une équation à une inconnue.

Exemple : Résoudre le système $(S): \begin{cases} 3x-y=5 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$.

1. On observe qu'on peut exprimer la variable y en fonction de la variable x à l'aide de la première équation.
2. Le système est alors équivalent au système $(S): \begin{cases} y=3x-5 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$.
3. On substitue alors la valeur $y=3x-5$ dans la deuxième équation.
4. On obtient le système équivalent $(S): \begin{cases} y=3x-5 \\ 2x+3(3x-5)=7 \end{cases}$.

5. On résout alors la deuxième équation $(S): \begin{cases} y=3x-5 \\ 11x-15=7 \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} y=3x-5 \\ 11x=22 \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} y=3x-5 \\ x=2 \end{cases}$.
6. Il suffit maintenant de substituer la valeur $x=2$ dans la première équation pour obtenir la valeur de y . On déduit $(S): \begin{cases} y=3 \times 2 - 5 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$.
7. Conclusion : le système a une unique solution, le couple $(2;1)$. On note $S = \{(2;1)\}$.

Remarque : Dans la pratique, on rédige cette résolution par une succession de systèmes équivalents :

$$(S): \begin{cases} 3x-y=5 \\ 2x+3y=7 \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} y=3x-5 \\ 2x+3y=7 \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} y=3x-5 \\ 2x+3(3x-5)=7 \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} y=3x-5 \\ 11x-15=7 \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} y=3x-5 \\ 11x=22 \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} y=3x-5 \\ x=2 \end{cases}$$

V. Méthode de résolution par combinaison

Méthode : Cette méthode consiste à multiplier l'une ou les deux équations par des coefficients bien choisis afin qu'une addition ou une soustraction de deux équations membre à membre permette l'élimination d'une des deux inconnues.

Exemple : Résoudre le système $(S): \begin{cases} 2x-5y=1 \\ 3x+2y=11 \end{cases}$ par la méthode par combinaisons.

1. On multiplie la première équation par 2 et la seconde par 5 pour obtenir le même nombre de y dans les deux équations. On obtient le système équivalent $(S): \begin{cases} 4x-10y=2 \\ 15x+10y=55 \end{cases}$.
2. On additionne les deux équations obtenues afin d'éliminer le nombre de y .
On obtient le système équivalent $(S): \begin{cases} 2x-5y=1 \\ 19x=57 \end{cases}$.
3. On résout la deuxième équation pour obtenir la valeur de x . On obtient $(S): \begin{cases} 2x-5y=1 \\ x=3 \end{cases}$.
4. Il suffit maintenant de substituer x par 3 dans la première équation pour obtenir la valeur de y . On obtient $(S): \begin{cases} 2 \times 3 - 5y = 1 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 5y = 1 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y = 1 - 6 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \end{cases}$.
5. Conclusion : le système a une unique solution, le couple $(1;3)$. On note $S = \{(1;3)\}$.

Remarque : Dans la pratique, on rédige cette résolution par une succession de systèmes équivalents :

$$(S): \begin{cases} 2x-5y=1 \\ 3x+2y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-10y=2 \\ 15x+10y=55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5y=1 \\ 19x=57 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5y=1 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} 2 \times 3 - 5y = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 5y = 1 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y = 1 - 6 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Exercice 6 : Résoudre par la méthode la plus adaptée, chacun des systèmes suivants :

$$(S): \begin{cases} x-3y-1 \\ -3x+4y=-2 \end{cases} \text{ et } (S'): \begin{cases} 3x+5y=-6 \\ 7x+3y=12 \end{cases}$$

VI. Parallélisme et intersection de deux droites

1. Parallélisme de deux droites

Définition : Deux droites (d) et (d') sont **parallèles** quand elles ont la même direction.

Remarque : deux droites parallèles et non confondues sont dites strictement parallèles.

Propriété : Deux droites (d) et (d') sont **parallèles** si et seulement si deux de leurs **vecteurs directeurs** sont **colinéaires**.

Exemple : Soit (d) : $4x - 2y = 0$ et (d') : $-12x + 6y - 3 = 0$.

$\vec{u}(2; 4)$ est un vecteur directeur de (d) et $\vec{v}(-6; -12)$ est un vecteur directeur de (d').

$\vec{v} = -3\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc (d) et (d') sont parallèles.

Propriété : Deux droites (d) et (d') d'équations réduites $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont **parallèles** si et seulement si leurs pentes sont égales c'est à dire si et seulement si **$m = m'$** .

Preuve :

Soit (d) et (d') deux droites d'équations réduites respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.

$\vec{u}(1; m)$ est un vecteur directeur de (d) et $\vec{u}'(1; m')$ est un vecteur directeur de (d').

(d) et (d') sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.

(d) et (d') sont parallèles si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{u}') = 0$.

(d) et (d') sont parallèles si et seulement si $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & m' \end{vmatrix} = 0$

(d) et (d') sont parallèles si et seulement si $1 \times m' - m \times 1 = 0$

(d) et (d') sont parallèles si et seulement si $m' = m$

#

Remarques : Deux droites (d) et (d') sont confondues lorsqu'elles ont des équations cartésiennes équivalentes.

2. Droites sécantes et intersection

Définition : deux droites non parallèles sont dites **sécantes**.

Propriétés: Soit (d) et (d') deux droites du plan d'équations cartésiennes respectives $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$.

Résoudre le système (S): $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, revient à étudier l'intersection de deux droites du plan.

- Le système (S) a soit une **unique solution** lorsque (d) et (d') sont **sécantes en un seul point**.
- Le système (S) a soit une **infinité de solutions** lorsque (d) et (d') sont **confondues**.
- Le système (S) n'a **aucune solution** lorsque (d) et (d') sont **strictement parallèles**.

d et d' sont sécantes. Le système admet une unique solution : le couple $(\alpha; \beta)$.	d et d' sont strictement parallèles. Le système n'admet aucune solution.	d et d' sont confondues. Le système admet une infinité de solutions.

Exercice 7 : Dans chacun des cas suivants, justifiez si les droites (d) et (d') sont parallèles ou sécantes et lorsqu'elles sont sécantes, déterminez les coordonnées de leur point d'intersection.

1. $(d) : 3x + y - 1 = 0$ et $(d') : -6x - 2y - 5 = 0$
2. $(d) : y = 2x + 4$ et $(d') : y = -5$
3. $(d) : -3x + 1 = 0$ et $(d') : x = -2$
4. $(d) : x - 3y - 1 = 0$ et $(d') : y = 2x + 3$
5. $(d) : 2x - 3y + 4 = 0$ et $(d') : 5x + 2y - 9 = 0$
6. $(d) : y = -x - 1$ et $(d') : y = 2x - 7$

Exercice 8 : On considère les droites (d) et (d') d'équations respectives $2x + y = 5$ et $6x - 3y = -3$.

1. Déterminer leur équation réduite
2. A l'aide de votre calculatrice graphique, afficher les droites dans un repère puis lire les coordonnées de leur point d'intersection K .
3. Vérifier, par le calcul, l'exactitude des coordonnées lues.