Chapitre 5 : Suites géométriques

1. Définition

Définition : Une suite $(u_n)_n$ est dite géométrique de raison strictement positive lorsque chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par un même nombre, q , appelé raison.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q u_n$$

Remarques :

- *Une suite géométrique est définie dès que l'on connaît son 1er terme et sa raison*
- *Si son 1er terme est u_0 et sa raison q , on a alors :*

$$u_1 = q u_0 \quad ; \quad u_2 = q u_1 = q^2 u_o \quad ; \quad u_3 = q u_2 = q^3 u_0 \quad ; \quad u_n = q^n u_0$$

Exercice 1 :

- Déterminer les 5 premiers termes de la suite géométrique $(u_n)_n$ de 1er terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 2$
- Déterminer les 5 premiers termes de la suite géométrique $(v_n)_n$ de 1er terme $v_0 = 5$ et de raison $q = 0{,}5$

2. Sens de variations

Propriété : Soit une suite géométrique $(u_n)_n$ de 1er terme $u_0 > 0$ et de raison q

- lorsque q = 0 ou q = 1, la suite est constante
- lorsque $u_0 > 0$ et $q > 1$, la suite est croissante
- lorsque $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$, la suite est décroissante
- lorsque $u_0 < 0$, les résultats précédents sont inversés par rapport au cas où $u_0 > 0$

Remarque : une étude au cas par cas est souvent plus rapide qu'une allocation directe de cette propriété.

Remarque : une suite $(u_n)_n$ ne s'annulant pas est géométrique lorsque le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est égal à un réel qui ne dépend pas de n .

Exercice 2 : Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de 1er terme $u_0 = 12$ et de raison $q = 10$.

1. Exprimer u_n en fonction de n et calculer le huitième terme de la suite.
2. Étudier le sens de variation de la suite.

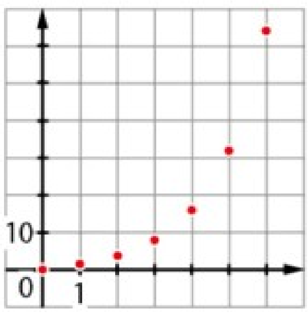
Exercice 3 : Soit $(u_n)_n$ une suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 \times 5^{n+1}$.
Montrer que la suite $(u_n)_n$ est géométrique et préciser sa raison et son 1er terme.

Exercice 4 : La population de la banlieue d'une ville augmente de 4 % par an et celle du centre-ville diminue de 5 % par an. En janvier 2011, elles sont toutes les deux de 50 000 habitants. Pour tout entier naturel n ,on note b_n et c_n les populations de la banlieue et du centre-ville l'année $2011+n$.

1. Déterminer les populations b_{n+1} et c_{n+1} l'année 2012 puis les populations en 2013.
2. Exprimer b_{n+1} en fonction de b_n et en déduire l'expression de b_n en fonction de n
3. Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n et en déduire l'expression de c_n en fonction de n

3. Représentation graphique

Suite de 1er terme 1 et de raison 2



Suite de 1er terme 27 et de raison $\frac{2}{3}$