Chapitre 6 : Fonctions exponentielles

I. Définitions et propriétés

Soit $a \in \mathbb{R}, a>0$. La suite (a_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = a^n$ est la suite géométrique de raison a et de 1er terme $a_0 = 1$.

En élargissant cette suite à des valeurs non entières de n, on définit une fonction, appelée fonction exponentielle de base a.

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}, a>0$. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} a^x \text{ si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{a^{-x}} \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

est appelée **fonction exponentielle de base a**.

Remarque : $\forall a>0, a^0 = 1 \text{ et } a^1 = a$

II. Propriétés algébriques et opérations

Propriétés : Soit $a \in \mathbb{R}, a>0$. Pour tout réels x et y et pour tout entier n :

$$\boldsymbol{a^{x+y} = a^x \times a^y} \qquad \boldsymbol{a^{-x} = \frac{1}{a^x}} \qquad \boldsymbol{a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}} \qquad \boldsymbol{a^{nx} = (a^x)^n}$$

Exercice 1 : Compléter

$2^{3,5} \times 2^{1,2} =$	$\dfrac{2^{3,5}}{2^{1,2}} =$	$(2^{3,1})^3 =$

Propriétés : Soit $a \in \mathbb{R}, a>0$. Pour tout réels x et y , on a :

$$\boldsymbol{a^x = a^y \Leftrightarrow x = y}$$

Exercice 2 : Écrire chaque expression sous la forme a^x avec $a>0$ et $x \in \mathbb{R}$

$A=7^3 \times 7^{5,2}$	$B=\dfrac{1}{9^{3,5} \times 9^{-2}}$	$C=(3^{4,2})^5$	$D=\dfrac{2^{-0,5} \times 2^3}{2^{-0,5} \times 2}$

Exercice 3 : Écrire chaque expression sous la forme $a^{f(x)}$ avec $a>0$ où $f(x)$ est fonction de x :

$A=3^{2x+1} \times 3^{x+5}$	$B=\dfrac{0,25^{4-3x}}{0,25^{x-1}}$	$C=(1,8^{2x+1})^{-3} \times 1,8^{x-7}$	$D=\dfrac{(5^{1-x})^2 \times 5^{2x+3}}{5^{x-6}}$

III. Sens de variation

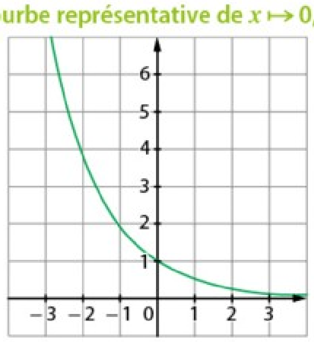
Propriétés : Soit $a \in \mathbb{R}, a>0$. Pour tout réels x et y et pour tout entier n :

- Si $\boldsymbol{0<a<1}$, la fonction $x \to a^x$ est **décroissante** sur $\mathbb{R}$
- Si $\boldsymbol{a=1}$, la fonction $x \to a^x$ est **constante égale à 1** sur $\mathbb{R}$
- Si $\boldsymbol{a>1}$, la fonction $x \to a^x$ est **croissante** sur $\mathbb{R}$

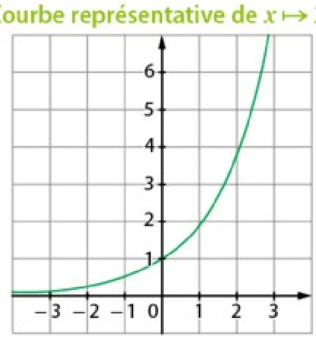
Exercice 4 : Justifier les variations des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=0,5^x$ et $g(x)=2^x$.

Remarque : ci-dessous, sont représentées les courbes représentatives des fonctions f et g

Courbe représentative de $x \mapsto 0,5^x$



Courbe représentative de $x \mapsto 2^x$



Propriétés : Soit $a \in \mathbb{R}, a > 0$ et $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$.

- Si $\boldsymbol{k > 0}$, la fonction $x \to k \times a^x$ **a le même sens de variation** que $x \to a^x$ sur $\mathbb{R}$
- Si $\boldsymbol{k < 0}$, la fonction $x \to k \times a^x$ **a le sens de variation contraire** à $x \to a^x$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 5 : Préciser et justifier les variations des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 \times 0{,}5^x$, $g(x) = 0{,}1 \times 1{,}8^x$, $h(x) = -7 \times 0{,}3^x$ et $i(x) = -19 \times 1{,}1^x$.

Exercice 6 : Soit $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ et $x \leqslant y$.

1. (a) Comparer $1{,}5^x$ et $1{,}5^y$ (b) Comparer $0{,}2^x$ et $0{,}2^y$
2. (a) Ranger par ordre croissant $1{,}5 ; 1 ; 1{,}5^{-3{,}5} ; 1{,}5^{0{,}5}$ et $1{,}5^{1{,}3}$
   (b) Ranger par ordre décroissant $0{,}2^{0{,}8} ; 0{,}2 ; 0{,}2^{-1} ; 0{,}2^2$ et 1