Chapitre 10 : Variables aléatoires

I. Variables aléatoires

1. Notion de variable aléatoire

Exemple : on considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé équilibré.
L'ensemble des issues possibles est Ω ={1;2;3;4;5;6}.
On fixe la règle de jeu suivante : on gagne 1€ si la face du dé qui sort est 1, 2 ou 3, 3€ si c'est la face 4 et on perd 2€ si c'est la face 5 ou 6.
Cette règle de jeu définit une fonction X : $\Omega \to$ {-2;1;3} qui, aux valeurs 1 ; 2 et 3 associe le nombre 1, à la valeur 4 associe le nombre 3 et aux valeurs 5 et 6 associe le nombre -2.

Une telle fonction X est appelée variable aléatoire (v.a) définit sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$

Définition : Soit Ω l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire. On définit une variable aléatoire (v.a) X sur Ω quand on associe un nombre réel à chaque issue de Ω. On dit que l'ensemble des réels est l'ensemble des valeurs prises par X.

2. Événements liés à une variable aléatoire

Soit X une v.a définie sur Ω.
L'ensemble des valeurs prises par X est $E'=\{x_1;x_2;...;x_n\}$ où les valeurs sont rangées par ordre croissant. Le nombre x_i est associé à une ou plusieurs issues de Ω.
On note X : $\Omega \to E'=\{x_1;x_2;...;x_n\}$

Définition :
1. L'événement «$X=x_i$» est l'ensemble des issues de Ω auxquelles sont associées le réel x_i
2. L'événement «$X\geq x_i$» est l'ensemble des issues de Ω auxquelles sont associées un réel réel supérieur ou égal à x_i

3. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Exemple : si on reprend l'exemple précédent, le nombre -2 est associé aux issues 5 et 6 donc la probabilité de l'événement « X=-2 » est celle de l'événement {5;6} de Ω.
Par équiprobabilité sur Ω, on a $P(X=-2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

Définition : la probabilité de l'événement «$X=x_i$» est la probabilité de l'événement formé de toutes les issues associées au nombre x_i

Définition : Soit X une v.a définie sur l'univers fini Ω et E' l'ensemble des valeurs prises par X. La loi de probabilité de la v.a X est la donnée de toutes les probabilités $P(X=x_i)$, où x_i prend toutes les valeurs de E'.

On présente souvent ces données sous la forme d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Propriété : $P(X=x_1)+P(X=x_2)+\ldots+P(X=x_n)=1$ ou bien $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$

Exercice 1 : On lance un dé non pipé et on gagne un nombre de points égal au double de la face supérieure affichée. On considère la variable aléatoire X associée, à chaque lancer, au nombre de points gagnés.

1. Quelle est l'issue qui permet de gagner 6 points ?
2. Quelle est l'issue associée à l'événement {X=4} ? Que vaut P(X=4) ?
3. Quelles sont les issues associées à l'événement {X<6} ? Que vaut P(X<6) ?

Exercice 2 : Une urne contient deux boules B_1 et B_2 numérotées respectivement 1 et 2.
On tire une première boule, on note son numéro, on la remet dans l'urne et on effectue un second tirage. On note le deuxième numéro et on effectue la somme des deux numéros sortis.

1. Définir une variable aléatoire X modélisant la situation.
2. Quelles valeurs sont prises par X ?
3. Quelles sont les issues correspondant à l'événement {X=3} ?

Exercice 3 : Un jeu comporte 8 cartes : 7, 8, 9, 10, V, D, R et As.
On tire une carte au hasard. On considère la variable aléatoire X qui prend la valeur 2 si l'on tire 7, 8, 9 ou 10 , la valeur 3 si on tire V, D ou R et la valeur 5 si on tire un As.
Dresser la loi de probabilité de X à l'aide d'un tableau.

II. Espérance et Variance

1. Espérance mathématique d'une variable aléatoire

L'espérance mathématique d'une v.a X peut être interpréter comme étant égale à la moyenne pondérée (au sens statistique) $x_1 f_1+x_2 f_2+\ldots+x_n f_n$ des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ affectés des fréquences $f_1, f_2, \ldots, f_n$ lorsque l'expérience aléatoire est répétée un grand nombre de fois. En effet,, quand l'expérience est répétée un grand nombre de fois, les fréquences $f_1, f_2, \ldots, f_n$ se stabilisent et tendent vers les probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Définition : l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_n$ est le nombre réel noté E(X) donné par

$$\mathbf{E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n}$$

Exemple : dans notre exemple de départ on a

$$E(X)=1\times\frac{3}{6}+3\times\frac{1}{6}+(-2)\times\frac{2}{6}=\frac{3}{6}+\frac{3}{6}-\frac{4}{6}=\frac{2}{6}=\frac{2}{3}\approx 0{,}66\,€$$

Ainsi, si on joue un très grand nombre de fois à ce jeu, on peut espérer gagner 0,66 €.

2. Variance et écart-type

La variance d'une v.a X, notée V(X), est un indicateur de dispersion des valeurs prises par X autour de sa moyenne, pondérées de leurs probabilités.

Définition : la variance d'une variable aléatoire X, notée V(X), est le nombre réel donné par :

$$\mathbf{V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2}$$

Définition : L'écart-type de la variable aléatoire X est le réel $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

Propriété : On a la relation suivante

$$\mathbf{V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - [E(X)]^2}$$

Propriété : Soit a et b deux réels. On a la relation suivante :

$$\boldsymbol{E(aX+b)=a\,E(X)+b \quad \text{et} \quad V(aX)=a^2 V(X)}$$

Démonstration :

- On suppose que la v.a X prend les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
- La v.a aX+b prend alors les valeurs $ax_1+b, ax_2+b, \ldots, ax_n+b$ avec les mêmes probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_n$ .On a donc
  $E(aX+b)=(ax_1+b)p_1+(ax_2+b)p_2+\ldots+(ax_n+b)p_n=ax_1p_1+ax_2p_2+\ldots+ax_np_n+b(p_1+p_2+\ldots+p_n)$
  or $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$ donc
  $E(aX+b)=a(x_1p_1+x_2p_2+\ldots x_np_n)+b\times 1=a\,E(X)+b$
- $V(aX)=E[(aX-E(aX))^2]=E[(aX-a\,E(X))^2]=E[\text{(a(X-E(X))^2}]$
  $V(aX)=E[a^2(X-E(X))^2]=a^2E[(X-E(X))^2]=a^2V(X)$ #

Exercice 4 : Calculer l'espérance, la variance puis l'écart-type à 0,01 près de la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est la suivante :

x_i	-1	2	5
$P(X=x_i)$	0,1	0,5	0,4

Exercice 5 : On lance un dé non pipé. Les règles du jeu sont les suivantes :

- R1 : si la face supérieure du dé est 1 ou 2, le joueur gagne 13€ sinon il perd 6€
- R2 : si la face supérieure du dé est 6, le joueur gagne 100€ sinon il perd 20€

On définit les variables aléatoires X et Y qui, à chaque partie, associe le gain du joueur (gain positif ou négatif) respectivement associée aux règles R1 et R2.

1. Calculer E(X) et E(Y)
2. Si vous deviez jouer à ce jeu un très grand nombre de fois, quelle règle serait-il préférable de choisir ?

III. Algorithme renvoyant l'espérance mathématique d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire. On entre les valeurs prises par X dans une liste V et les probabilités associées dans une liste P.
La variable E contient l'espérance de X.

```
def moyvar(V,P):
    E=0
    for i in range(len(V)):
        E=E+V[i]*P[i]
    return E
```

Exercice 6 : Compléter le programme Python ci-dessus afin qu'il renvoie en plus la variance et l'écart-type de la variable aléatoire.