Exercice 1

Le président d'un club décide d'organiser une tombola. Tous les billets, au nombre de 500, sont vendus. L'un des billets permet de gagner un lot d'une valeur de 620€, neuf billets permettent chacun de gagner un lot d'une valeur de 70€, cinquante billets sont remboursés, et les autres sont perdants. Le billets sont vendus 5€. On appelle X la variable aléatoire associant à chaque billet la somme d'argent gagnée (comptée positivement) ou perdue (compté négativement).

1. Donner les différentes valeurs prises par X.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer l'espérance mathématique de X et l'interpréter.
4. Calculer l'écart-type de X.

Correction

1. $X(\Omega)=\{-5\,;0\,;65{,}615\}$.
2. C'est une situation d'équiprobabilité, on a :

   $p(X=615)=\frac{1}{500}$, $p(X=65)=\frac{9}{500}$, $p(X=0)=\frac{50}{500}$ et $p(X=-5)=\frac{440}{500}$

   On peut alors résumer cette loi de probabilité dans le tableau ci-dessous :

x_i	-5	0	65	615
$p(X=x_i)$	$\frac{440}{500}$	$\frac{50}{500}$	$\frac{9}{500}$	$\frac{1}{500}$

3. $E(X)=-5\times\frac{440}{500}+0\times\frac{50}{500}+65\times\frac{9}{500}+615\times\frac{1}{500}=-2$

4. $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=(-5)^2\times\frac{440}{500}+0^2\times\frac{50}{500}+65^2\times\frac{9}{500}+615^2\times\frac{1}{500}-(-2)^2=850{,}5$

   $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{850{,}5}\approx 29{,}16$

Exercice 2

La variable aléatoire *X* prend les valeurs 0 et 1, et son espérance mathématique est $\frac{1}{4}$.

Calculer sa variance et son écart-type.

Correction

$E(X)=0\times p(X=0)+1\times p(X=1)=p(X=1)$ et $E(X)=\frac{1}{4}$ donc $p(X=1)=\frac{1}{4}$

De plus, $p(X=0)+p(X=1)=1$ donc $p(X=0)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=0^2\times\frac{3}{4}+1^2\times\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$ $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{3}{16}}\approx 0{,}43$

Exercice 3

Un concessionnaire vend entre 0 et 4 voitures d'un certain modèle en une semaine. Soit *X* la variable aléatoire qui, pour une semaine, donne le nombre de voitures vendues. *X* suit la loi de probabilité indiquée dans le tableau ci-dessous :

x_i	0	1	2	3	4
$p(X=x_i)$	0,26	0,23	a	0,15	0,05

1. Calculer *a*.
2. Calculer l'espérance mathématique de *X*. En déduire le nombre moyen de voitures vendues en une année.
3. Le prix de vente d'une voiture est 13500€. Le vendeur perçoit une commission de 0,4% sur le prix de vente pour chaque voiture vendue. Déterminer le montant moyen de la commission perçue par mois.

Correction

x_i	0	1	2	3	4
$p(X=x_i)$	0,26	0,23	a	0,15	0,05

1. Dans le tableau qui donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire, la somme des probabilités est égale à 1 donc $a=1-(0{,}26+0{,}23+0{,}15+0{,}05)=0{,}31$.
2. $E(X)=0\times 0{,}26+1\times 0{,}23+2\times 0{,}31+3\times 0{,}15+4\times 0{,}05=1{,}5$
   On en déduit que l'espérance de vente est de 1,5 voitures par semaine soit 78 voitures par an.
3. $78\times 13500\times\frac{0{,}4}{100}\div 12=351$: Il peut espérer obtenir 351€ de commission par mois.

Exercice 4

Le gérant d'un casino désire créer un nouveau jeu. Un participant doit au préalable miser 5€. une fois la mise donnée, il lance deux dés à six faces et on soustrait le plus petit nombre obtenu au plus grand (résultat toujours positif ou nul). Si le résultat est supérieur ou égal à 3, alors le joueur reçoit n euros sinon il perd sa mise.

1. Montrer que la probabilité que le joueur perde sa mise est $\frac{2}{3}$.
2. En déduire la probabilité que ce joueur gagne la partie.
3. Déterminer la plus grande valeur de n (à l'euro près) afin que ce jeu reste avantageux pour le casino.

Correction

1. On peut modéliser la situation à l'aide du tableau à double entrée ci-dessous.

Dé1 / Dé2	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

C'est une situation d'équiprobabilité, il y a 36 issues possibles.
Soit X la variable aléatoire qui à un lancé des deux dés, associe, le gain. $X(\Omega)=\{-5;n\}$.
On a $p(X=-5)=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$ et $p(X=n)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$.
L'événement « le joueur perd sa mise » correspond à l'événement $\{X=-5\}$ donc sa probabilité est $\frac{2}{3}$ et l'événement « le joueur gagne la partie » correspond à l'événement $\{X=n\}$ donc sa probabilité est $\frac{1}{3}$. On peut alors résumer cette loi de probabilité dans le tableau ci-dessous :

x_1	-5	n
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

2. $E(X)=\frac{2}{3}\times(-5)+\frac{1}{3}\times n=\frac{1}{3}n-\frac{10}{3}$. Ce jeu reste avantageux pour le casino si

   $E(X)<0$ et $E(X)<0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{3}n-\frac{10}{3}<0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{3}n<\frac{10}{3}$ $\Leftrightarrow$ $n<10$

   Ce jeu reste avantageux pour le casino si le joueur ne reçoit pas plus de 9€.