

Chapitre 9 : Produit scalaire

I. Définition du produit scalaire par le cosinus

Définition : Soit $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$ deux vecteurs non nuls.

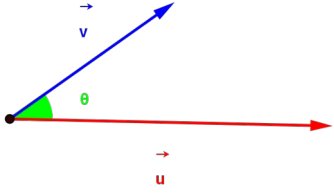
1. On appelle produit scalaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le nombre réel défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \widehat{BAC}$$

ou encore

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

2. Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$



Définition : On appelle **carré scalaire** du vecteur \vec{AB} le réel noté $\vec{AB}^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB}$

Propriété : $\vec{AB}^2 = \|\vec{AB}\|^2 = AB^2$

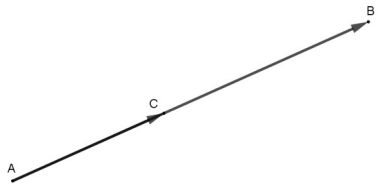
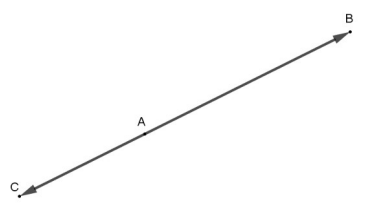
Démonstration :

D'une part, $\|\vec{AB}\| = AB$ donc $\|\vec{AB}\|^2 = AB^2$

D'une part, $\vec{AB}^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = AB \times AB \times \cos 0 = AB \times AB \times 1 = AB^2$

Conclusion : $\vec{AB}^2 = \|\vec{AB}\|^2 = AB^2$

#

Cas particuliers des vecteurs colinéaires	
\vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires et de même sens	\vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires de sens contraires
	
$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(0) = AB \times AC$	$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\pi) = -AB \times AC$

Exercice 1 : $ABDC$ est un parallélogramme tel que $AB=5, AC=4$ et $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{6}$. Calculer :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD}$$

$$\vec{DB} \cdot \vec{CD}$$

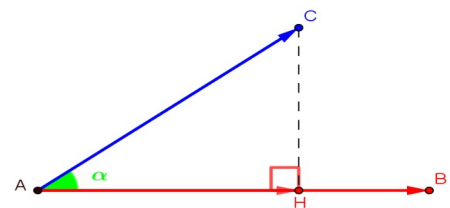
II. Définition du produit scalaire par le projeté orthogonal

1. Définition

Propriété : A, B et C sont trois points avec A et B distincts.

On note H le projeté orthogonal de C sur (AB) .

On a alors $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$



Démonstration :

<p>1^{er} cas : l'angle \widehat{BAC} est aigu donc $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$</p> <p>Dans le triangle AHC rectangle en H on a $\cos(\widehat{HAC}) = \frac{AH}{AC}$ d'où</p> $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = AB \times AC \times \frac{AH}{AC} = AB \times AH$	
<p>2^{ème} cas : l'angle \widehat{BAC} est obtus donc $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$</p> $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = AB \times AC \times \cos(\pi - \widehat{HAC})$ $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AC \times \cos(\widehat{HAC}) = -AB \times AH$	
<p>3^{ème} cas : l'angle \widehat{BAC} est droit donc $\alpha = \frac{\pi}{2}$</p> <p>Le point H est alors confondu avec A.</p> $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = AB \times AC \times \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times 0 = 0$ $\vec{AB} \cdot \vec{AH} = \vec{AB} \cdot \vec{AA} = \vec{AB} \cdot \vec{0} = 0$	
<p>Conclusion : dans tous les cas on a $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$ #</p>	

2. Propriétés de bilinéarité du produit scalaire

Propriété : \vec{u} et \vec{v} désignent deux vecteurs. On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Remarque : . Le produit scalaire est dit symétrique.

Démonstration :

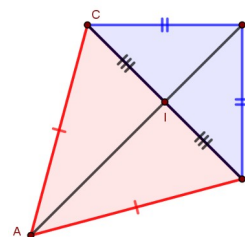
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = AC \times AB \times \cos(\widehat{CAB}) = \vec{AC} \cdot \vec{AB} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad \#$$

Propriétés (admisses) : \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} désignent trois vecteurs et k désigne un nombre réel. On a :

1. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
3. $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$

Remarque : . Le produit scalaire est dit bilinéaire

Exercice 2 : Le triangle ABC est équilatéral de côté 4cm. Le triangle BCD est isocèle en D et BD = 3. A l'aide de la figure ci-contre :



1. Démontrer que les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires .
2. Calculer $\vec{AD} \cdot \vec{BC}$.
3. Calculer $\vec{CI} \cdot \vec{BI}$ puis $\vec{CI} \cdot \vec{BD}$
4. Calculer $\vec{IA} \cdot \vec{ID}$ puis $\vec{IA} \cdot \vec{BD}$
5. En déduire $\vec{BD} \cdot \vec{CA}$

Exercice 3 :

A l'aide des formules de bilinéarité du produit scalaire, calculer :

$(\vec{u} + \vec{v})^2$	$(\vec{u} - \vec{v})^2$	$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$
-------------------------	-------------------------	---

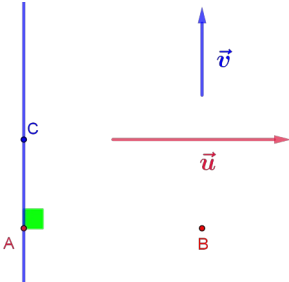
1. Qu'observez-vous ?
2. A l'aide des expressions de $(\vec{u} + \vec{v})^2$ et $(\vec{u} - \vec{v})^2$ en déduire une nouvelle expression de $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

III. Caractérisation de l'orthogonalité par le produit scalaire

Définition : Étant donné deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} et trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \vec{AB}; \vec{v} = \vec{AC}$,

(1) les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont dits orthogonaux lorsque les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

(2) Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.



Propriété : Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont dits orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Démonstration :

1^{er} cas : si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux car le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.

2^{ème} cas : si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors considérons trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC}) = 0 \Leftrightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ \Leftrightarrow (AB) \perp (AC) \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \quad \#$$

IV. Définition du produit scalaire dans une base orthonormée

Propriété : Étant donnés deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ dans une base orthonormée, on définit le produit scalaire de \vec{u} et de \vec{v} par $\vec{u} \cdot \vec{v} = x \times x' + y \times y'$

Attention : cette définition du produit scalaire n'est valable que dans une base orthonormée !

Démonstration :

On considère une base orthonormée du plan $(\vec{i}; \vec{j})$.
 On a donc $(\vec{i})^2 = \|\vec{i}\|^2 = 1$ et $(\vec{j})^2 = \|\vec{j}\|^2 = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$
 $\vec{u}(x; y)$ donc $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v}(x'; y')$ donc $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$

$$\text{On déduit que } \vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = xx'(\vec{i})^2 + xy'\vec{i} \cdot \vec{j} + yx'\vec{j} \cdot \vec{i} + yy'(\vec{j})^2 = xx' + yy' \quad \#$$

Propriété : Si $\vec{u}(x;y)$ dans une base orthonormée alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

Démonstration :

On considère une base orthonormée du plan $(\vec{i}; \vec{j})$.

On a donc $(\vec{i})^2 = \|\vec{i}\|^2 = 1$ et $(\vec{j})^2 = \|\vec{j}\|^2 = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$ et $\vec{u}(x;y)$ donc $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

On déduit que $\|\vec{u}\|^2 = (\vec{u})^2 = (\vec{u} \cdot \vec{u}) = x \times x + y \times y = x^2 + y^2$ donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ #

Propriété : Étant donné deux vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ dans une base orthonormée, on a :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$$

Démonstration : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$ #

Exercice 4 :

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-5;7); B(6;-3)$ et $C(-1;4)$.

Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}; \vec{AB} \cdot \vec{BC}$ et $\vec{AC} \cdot \vec{CB}$

Exercice 5 :

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(0;-1); B(-7;-2); C(-9;12)$ et $D(-6;-9)$. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

V. Applications du produit scalaire

1. Calcul de $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$

Propriété : Étant donné deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} , on a $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

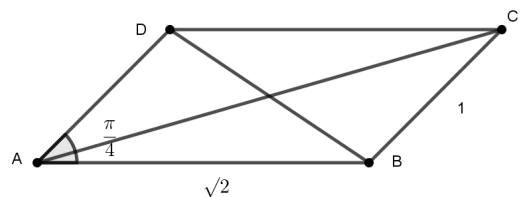
Démonstration :

D'après les formules de bilinéarité du produit scalaire, on a $(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u})^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + (\vec{v})^2$.

Or $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ et $(\vec{u})^2 = \|\vec{u}\|^2$ et $(\vec{v})^2 = \|\vec{v}\|^2$ d'où $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ #

Exercice 6 :

Dans le parallélogramme ABCD ci-contre, calculer AC.



Exercice 7 :

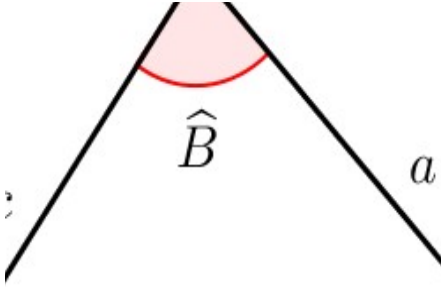
ABCD est un parallélogramme tel que $AB = 6, AD = 8$ et $AC = 12$. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{CA}$

2. Théorème d'Al-Kashi

Théorème : ABC est un triangle.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$


Démonstration

Montrons la 1ère égalité. Les deux autres s'obtiennent de manière identique.

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = BA^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2 = AB^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AB AC \cos \widehat{BAC}$$

d'où le résultat

#

Exercice 8 : Dans un triangle ABC , on a AB=5 ; AC=4 et A-hat=30° . Calculer BC .

Exercice 9 : Dans un triangle ABC , on a AB=6 ; AC=3 et A-hat=120° . Calculer BC .

Exercice 10 : Dans un triangle ABC , on a AB=10 ; AC=13 et BC=12 . Calculer A-hat au degré près.

3. Triangle rectangle et cercle

Propriété : Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Démonstration :

Soit Ω le centre du cercle de diamètre [AB] noté C([AB]) .

Pour tout point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A}) \cdot (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega B}) = (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A}) \cdot (\overrightarrow{M\Omega} - \overrightarrow{\Omega A}) = (\overrightarrow{M\Omega})^2 - (\overrightarrow{\Omega A})^2$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{M\Omega})^2 - (\overrightarrow{\Omega A})^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{M\Omega})^2 = (\overrightarrow{\Omega A})^2 \Leftrightarrow M\Omega = \Omega A \Leftrightarrow M \in C([AB])$$

#

Propriété : Un point M distinct de A et de B appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si le triangle ABM est rectangle en M.

Démonstration

Soit M un point du plan distinct de A et de B.

M appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si (MA) et (MB) sont perpendiculaires si et seulement si ABM est rectangle en M.

#