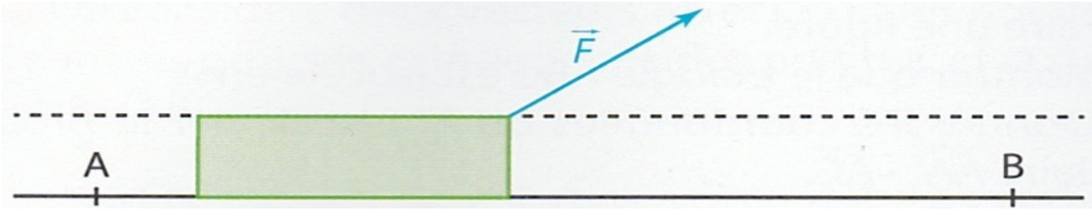
Exercice 1

Le travail d'une force se calcule de la façon suivante : $W=\vec{F}.\overrightarrow{AB}$ où $\vec{F}$ est une force constante qui s'exerce en un point se déplaçant de A à B suivant une trajectoire rectiligne.



On sait que l'intensité de la force est de 700 N et que AB = 60 m. Déterminer le travail de cette force selon que l'angle vaut :

a) 0° b) 30° c) 60°

Correction

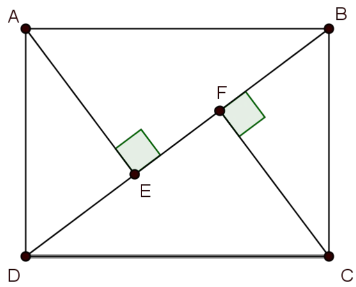
a) $W=\vec{F}.\overrightarrow{AB}=F\times AB\times\cos(0°)=700\times60\times1=42000\,N$

b) $W=\vec{F}.\overrightarrow{AB}=F\times AB\times\cos(30°)=700\times60\times\frac{\sqrt{3}}{2}=21000\sqrt{3}\,N$

c) $W=\vec{F}.\overrightarrow{AB}=F\times AB\times\cos(60°)=700\times60\times\frac{1}{2}=21000\,N$

Exercice 2

ABCD est un rectangle tel que AB = 8 et AD = 6. On note E et F les projetés orthogonaux de A et de C sur [DB].



1. Montrer que $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{BD}$.
2. Montrer que $AD^2-AB^2=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.
3. Déduire des questions précédentes la longueur du segment [EF].

Correction

1. E et F sont les projetés orthogonaux respectifs de A et de C sur (BD) donc
   $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{BD}$.
2. $AD^2-AB^2=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$
   Or ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ donc
   $AD^2-AB^2=\overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA})=\overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$
3. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{BD}$ et $AD^2-AB^2=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$ donc
   $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{BD}=AD^2-AB^2$ donc
   $-EF\times BD=AD^2-AB^2$ car $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires de sens contraires donc
   $EF=\dfrac{AD^2-AB^2}{BD}=\dfrac{8^2-6^2}{\sqrt{8^2+6^2}}$ d'après le théorème de Pythagore dans ABD rectangle en A

   donc

   $EF=\dfrac{64-36}{10}=\dfrac{28}{10}=\dfrac{14}{5}=2{,}8$

Exercice 3

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $A(-6\,;4)$, $B(-2\,;2)$ et $C(5\,;-7)$.

1. Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.
2. On note H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC). Montrer que $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}$.
3. Calculer BC. En déduire BH et HC.

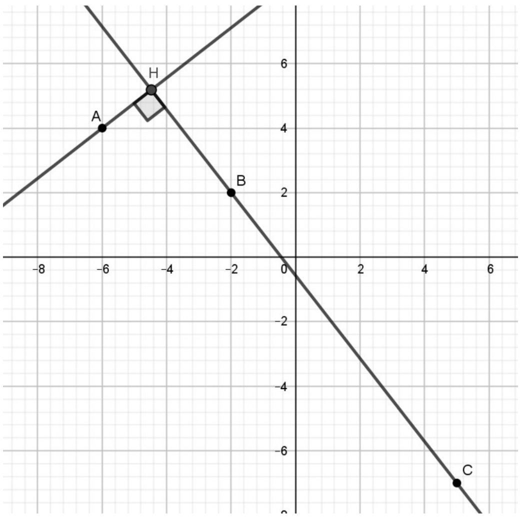
Correction

1. $\overrightarrow{BA}(-4\,;2)$ et $\overrightarrow{BC}(7\,;-9)$ donc $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=(-4)\times 7+2\times(-9)=-28-18=-46$
2. H est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) donc $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}$
3. $BC=\sqrt{7^2+(-9)^2}=\sqrt{49+81}=\sqrt{130}$

   Or $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires de sens contraires donc
   $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}=-BH\times BC$

   $-46=-BH\times\sqrt{130}$ donc $BH=\dfrac{-46}{-\sqrt{130}}=\dfrac{46\sqrt{130}}{130}=\dfrac{23\sqrt{130}}{65}\approx 4{,}03$

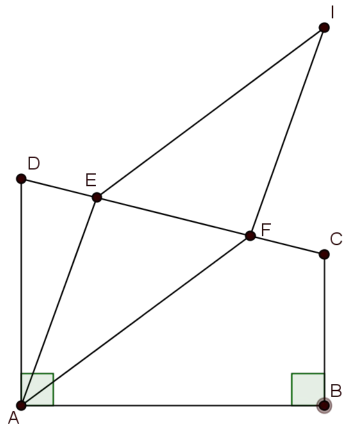
   H, B et C sont alignés dans cet ordre donc
   $HC=HB+BC=\dfrac{23\sqrt{130}}{65}+\sqrt{130}=\dfrac{88\sqrt{130}}{65}\approx 15{,}44$



Exercice 4

ABCD est un trapèze rectangle en A et en B tel que AB = 4.

Soit E et F les points tels que : $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$.



1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AB}$.
2. Soit I le point tel que $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CI}$.
3. Que peut-on en déduire ?

Correction

1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}^2=AB^2=4^2=16$ car B est le projeté orthogonal de C sur (AB).

   $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE}=0+\overrightarrow{AB}.(\frac{1}{4}\overrightarrow{DC})=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2=4$

   De même, $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}^2=12$

2. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AI})=\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}$
   $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CI}=-16+4+12=0 \text{ donc } \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CI} \text{ donc } (AB)\perp(CI)$