Exercice 1

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(2;7)$, $B(6;5)$ et $C(4;1)$.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.
2. Que peut-on en déduire pour le cercle de diamètre [AC]

Correction

1. $\overrightarrow{BA}(-4;2)$ et $\overrightarrow{BC}(-2;-4)$ d'où $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=(-4)\times(-2)+2\times(-4)=8-8=0$
2. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=0$ donc le triangle ABC est rectangle en B donc le cercle circonscrit au triangle ABC est le cercle de diamètre [AC].

Exercice 2

On se place dans un repère orthonormé.
Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Soit les points $N(0;2)$ et $P(-5;9)$. Le point $M(1;8)$ appartient au cercle de diamètre [NP].
2. Soit les points $A(4;2)$ et $B(0;-2)$. Le point $C(2;\sqrt{8})$ appartient au cercle de diamètre [AB].

Correction

1. $\overrightarrow{MN}(-1;-6)$ et $\overrightarrow{MP}(-6;1) d'où \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}=(-1)\times(-6)+(-6)\times 1=6-6=0$ donc le triangle MNP est rectangle en M donc le cercle circonscrit au triangle MNP est le cercle de diamètre [NP] donc a fortiori M appartient au cercle de diamètre [NP].

2. $\overrightarrow{CA}(2;2-\sqrt{8})$ et $\overrightarrow{CB}(-2;-2-\sqrt{8}) d'où \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=2\times(-2)+(2-\sqrt{8})\times(-2-\sqrt{8})$
   $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=-4-4-2\sqrt{8}+2\sqrt{8}+8=-8+8=0$
   donc le triangle ABC est rectangle en C donc le cercle circonscrit au triangle ABC est le cercle de diamètre [AB] donc a fortiori C appartient au cercle de diamètre [AB].

Exercice 3

On donne les points A et B tels que AB = 12 et I le milieu du segment [AB]. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=4$.

Correction

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=4\Leftrightarrow(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=4\Leftrightarrow\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=4$$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=4\Leftrightarrow\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA})+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=4$$

Or I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{IA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ d'où

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=4\Leftrightarrow\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA})-(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}).(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})=4\Leftrightarrow MI^2-\frac{1}{4}AB^2=4$$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=4\Leftrightarrow MI^2-36=4\Leftrightarrow MI^2=40\Leftrightarrow MI=\sqrt{40}=2\sqrt{10}\Leftrightarrow M\in C(I;2\sqrt{10})$$

Exercice 4

On donne les points C et D tels que CD = 10 et H le milieu du segment [CD]. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=-9$.

Correction

$$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=-9\Leftrightarrow(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HC}).(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HD})=-9\Leftrightarrow\overrightarrow{MH}^2+\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HD}=-9$$

$$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=-9\Leftrightarrow\overrightarrow{MH}^2+\overrightarrow{MH}.(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{HC})+\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HD}=-9$$

Or H est le milieu de [CD] donc $\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HD}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{HC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{HD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ d'où

$$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=-9\Leftrightarrow\overrightarrow{MH}^2+\overrightarrow{MH}.(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HD})-(\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}).(\frac{1}{2}\overrightarrow{CD})=-9\Leftrightarrow MH^2-\frac{1}{4}CD^2=-9$$

$$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=-9\Leftrightarrow MH^2-100=-9\Leftrightarrow MH^2=91\Leftrightarrow MH=\sqrt{91}\Leftrightarrow M\in C(H\,;\sqrt{91})$$

Exercice 5

On considère un triangle ABC et A' le milieu du segment [BC]. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=0$.

Correction

$$\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'C})=0\Leftrightarrow MA.2\overrightarrow{MA'}=0$$

$$\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=0\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}=0\Leftrightarrow M\in C([AA'])$$

Exercice 6

Soit A et B deux points tels que AB = 4 et I le milieu de [AB].

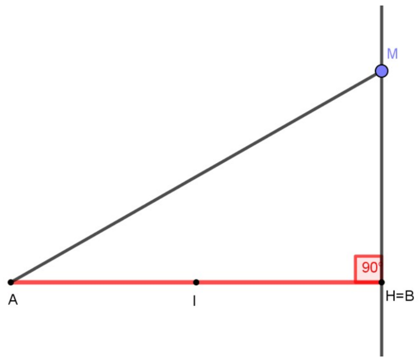
1. Démontrer que, pour tout point M du plan : $MA^2 - MB^2 = 2\,\overrightarrow{IMm}.\overrightarrow{AB}$.
2. Application : dans chacun des cas suivants, déterminer et construire l'ensemble des points M du plan :
   a. $MA^2 - MB^2 = 16$
   b. $MA^2 - MB^2 = -8$

Correction

1. $MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}).(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM}) = 2\,\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$
   car I milieu de [AB] donc $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ d'où $MA^2 - MB^2 = 2\,\overrightarrow{IMm}.\overrightarrow{AB}$

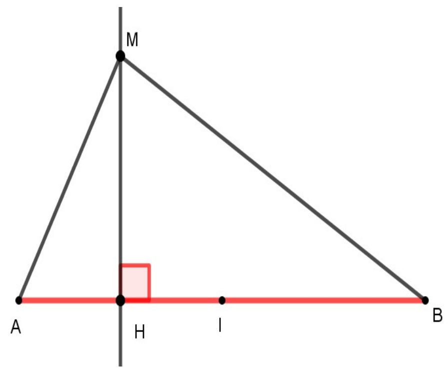
2. (a)
   $MA^2 - MB^2 = 16 \Leftrightarrow 2\,\overrightarrow{IMm}.\overrightarrow{AB} = 16 \Leftrightarrow \overrightarrow{IMm}.\overrightarrow{AB} = 8 \Leftrightarrow \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB} = 8 \Leftrightarrow H \in [IB]$ et $IH.AB = 8$
   avec H projeté orthogonal de M sur (AB). On déduit que :
   $MA^2 - MB^2 = 16 \Leftrightarrow IH = 2 \Leftrightarrow H = B$

   Conclusion : M décrit la droite perpendiculaire à (AB) passant par B.



(b) De même, $MA^2 - MB^2 = -8 \Leftrightarrow 2\,\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB} = -8 \Leftrightarrow \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB} = -4 \Leftrightarrow H \in [AI]$ et $IH = 1$

Conclusion : M décrit la médiatrice à [IA].



Exercice 7

ABC est un triangle tel que AB = 5, AC = 4 et $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{3}$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer BC
3. Calculer $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$
4. En déduire une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ à 0,1° près.

Correction

1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})=5\times4\times\frac{1}{2}=10$

2. Dans le triangle ABC, d'après le théorème d'Al-Kashi, on a :
   $BC^2=AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})=25+16-20=21$

3. $\overrightarrow{BA}^2=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})^2=BC^2+AC^2+2\,\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}=BC^2+AC^2-2\,\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$
   $25=21+16-2\,\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\frac{(25-21-16)}{(-2)}=\frac{-12}{-2}=6$
   $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=6\Leftrightarrow CA\times CB\times\cos\widehat{ACB}=6\Leftrightarrow4\times5\times\cos(\widehat{ACB})=6\Leftrightarrow\cos(\widehat{ACB})=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$
   $\cos(\widehat{ACB})=\frac{3}{10}\Leftrightarrow\widehat{ACB}\approx72{,}5°$