Exercice 1

ABCD est un parallélogramme tel que AB = 9, AC = 5 et BC = 7.

1. Simplifier la somme vectorielle $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$.
2. Calculer $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$.
3. Justifier l'égalité $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
4. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.
5. Simplifier la somme vectorielle $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$.
6. En déduire BD.

Correction

1. $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$ d'après la relation e Chasles
2. $\overrightarrow{CB}^2=(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB})^2=\overrightarrow{CA}^2+2\,\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}^2$ donc
   $CB^2=CA^2+AB^2+2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$ donc
   $CB^2=CA^2+AB^2+2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$ donc $7^2=5^2+9^2+2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$ donc $49=25+81+2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$ donc
   $49=106+2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}=\frac{(49-106)}{2}=\frac{-57}{2}=-28{,}5$
3. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ car ABCD est un parallélogramme. C'est la règle du parallélogramme.
4. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AC}^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2$ donc
   $AC^2=AB^2+AD^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ donc
   $5^2=9^2+7^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ donc $25=81+49+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ donc $25=130+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ donc
   $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\frac{(25-130)}{2}=\frac{-105}{2}=-52{,}5$
5. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$ d'après la relation e Chasles
6. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{BD}^2=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})^2$ donc $BD^2=BA^2+AD^2+2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}$ donc
   $BD^2=9^2+7^2-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=81+49-(-105)=125+105=230$ donc $BD=\sqrt{230}\approx 15{,}1$

Exercice 2
Soit ABCD un losange de centre O tel que AC = 8 et BD = 6.

1. Calculer la longueur du côté de ce losange.
2. Simplifier la somme vectorielle $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$
3. En déduire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.
4. Justifier que $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DB}$.
5. En déduire $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CD}$

Correction

1. ABCD est un losange de centre O donc OA=OC=4 et OB=OD=3 et le triangle AOB est rectangle en O. D'après le théorème de Pythagore, on a :
   $AB^2=AO^2+OB^2 \Leftrightarrow AB^2=4^2+3^2=16+9=25 \Leftrightarrow AB=5$
   Conclusion : le côté du losange ABCD vaut 5.
2. ABCD est un losange donc un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ d'après la règle du parallélogramme.
3. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AC^2}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2$
   $AC^2=AB^2+AD^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ donc
   $8^2=5^2+5^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ donc $64=50+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\dfrac{(64-50)}{2}=\dfrac{14}{2}=7$
4. $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}$ car ABCD est un losange donc un parallélogramme.
5. $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{CD}$ donc $DB^2=DA^2+CD^2-2\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CD}$ donc $6^2=5^2+5^2-2\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CD}$ donc
   $36=25+25-2\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CD}$ donc $36=50-2\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CD}$ donc $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CD}=\dfrac{(50-36)}{2}=\dfrac{14}{2}=7$

Remarque : on pouvait trouver ce résultat bien plus simplement :

$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=7$ d'après le 3. avec ABCD losange donc parallélogramme.

Exercice 3

Soit ABCD un parallélogramme tel que AB = 4, AC = 9 et AD = 6.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$
2. En déduire une valeur approchée à un degré près de $\widehat{BAD}$.
3. Calculer la longueur de la diagonale [BD].

Correction

1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AC}^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2$
   $AC^2=AB^2+AD^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ donc
   $9^2=4^2+6^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ donc $81=16+36+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=52+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$
   $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\frac{(81-52)}{2}=\frac{29}{2}=14{,}5$

2. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=AB\times AD\times\cos(\widehat{BAD})$ donc $14{,}5=4\times 6\times\cos(\widehat{BAD})=24\times\cos(\widehat{BAD})$ donc
   $\cos(\widehat{BAD})=\frac{14{,}5}{24}=\frac{29}{48}$ donc $\widehat{BAD}\approx 53\,°$ arrondi au degré près.
3. $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{BD}^2=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})^2$ donc
   $BD^2=AB^2+AD^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=4^2+6^2-29=16+36-29=52-29=13$ donc $BD=\sqrt{13}$

Exercice 4

1. Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Montrer que $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$
2. Application : ABC est un triangle tel que AB = 3, BC = 7 et AC = 6. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
3. Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Montrer que $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2)$
4. Application : si ABCD est un parallélogramme, montrer que $AC^2+BD^2=2(AB^2+BC^2)$. En déduire la longueur de la diagonale [BD] si AB = 7, BC = 5 et AC = 9.

Correction

1. $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$ donc
   $2\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$ donc $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$
2. On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$. On a $\vec{u}-\vec{v}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$.
   Or, $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{CB}\|^2)$ donc
   $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(3^2+6^2-7^2)=\frac{1}{2}(9+36-49)=\frac{1}{2}\times(-4)=-2$
3. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=(\vec{u}+\vec{v})^2+(\vec{u}-\vec{v})^2=(\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2)+(\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2)$
   $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2\vec{u}^2+2\vec{v}^2=2(\vec{u}^2+\vec{v}^2)=2(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2)$
4. On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$. On a $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ et $\vec{u}-\vec{v}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$ car ABCD est un parallélogramme.
   Or, $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2)$ donc $AC^2+BD^2=2(AB^2+AD^2)=2(AB^2+BC^2)$
   avec $AD=BC$ car ABCD est un parallélogramme . On déduit que :
   $8^2+BD^2=2(6^2+4^2)=2\times(36+16)=2\times52=104$ donc $64+BD^2=104$ donc
   $BD^2=104-64=40$ donc $BD=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

Exercice 5

Le triangle ABC est tel que AB = 4, AC = 7 et BC = 5 .

1. Montrer que $16=25+49-70\cos(\widehat{ACB})$.
2. En déduire la valeur exacte de $\cos(\widehat{ACB})$ puis une valeur approchée de l'angle $\widehat{ACB}$ à 0,1 degré près.

Correction

1. Dans le triangle ABC, d'après le théorème d'Al-Kashi, on a :
   $AB^2=BC^2+AC^2-2\times BC\times AC\times\cos(\widehat{ACB})$ donc
   $4^2=5^2+7^2-2\times5\times7\times\cos(\widehat{ACB})$ donc $16=25+49-70\cos(\widehat{ACB})$
2. $16=25+49-70\cos(\widehat{ACB})=74-70\cos(\widehat{ACB})$ donc
   $\cos(\widehat{ACB})=\frac{74-16}{70}=\frac{58}{70}=\frac{29}{35}$ d'où $\widehat{ACB}\approx34,0°$ arrondi à 0,1° près.