Tous les repères sont supposés orthonormés.

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

1. $\vec{u}(-2;5)$ et $\vec{v}(1;-2)$
2. $\vec{u}(-2;5)$ et $\vec{v}(5;2)$
3. $\vec{u}(4;3)$ et $\vec{v}(6;-8)$

Correction

1. $\vec{u}.\vec{v}=(-2)\times1+5\times(-2)=-2-10=-12\neq0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.
2. $\vec{u}.\vec{v}=(-2)\times5+5\times2=-10+10=0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
3. $\vec{u}.\vec{v}=4\times6+3\times(-8)=24-24=0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer *m* de telle sorte que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

1. $\vec{u}(-5;6)$ et $\vec{v}(m;4)$
2. $\vec{u}(m-9;m-7)$ et $\vec{v}(m+2;-4)$

Correction

1. $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow-5m+24=0\Leftrightarrow m=\frac{24}{5}=4{,}8$

2. $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow(m-9)(m+2)+(m-7)\times(-4)=0$
   $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow m^2+2m-9m-18-4m+28=0\Leftrightarrow m^2-11m+10=0$
   $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow(m-1)(m-10)=0\Leftrightarrow m=1\text{ ou }m=10$

Exercice 3

Soient les points $A(-3;2)$, $B(6;-1)$, $C(3;4)$ et $D(1;-2)$.
Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Correction

$\overrightarrow{AB}(9;-3)$ et $\overrightarrow{CD}(-2;-6)$.
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=9\times(-2)+(-3)\times(-6)=-18+18=0$ donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ donc $(AB)\perp(CD)$

Exercice 4

Soient les points $A(3;5)$, $B(-3;7)$, $C(-1;1)$ et $D(5;-1)$.

1. Calculer $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
3. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

Correction

1. $\overrightarrow{BD}(8;-8)$ et $\overrightarrow{AC}(-4;-4)$ donc $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}=8\times(-4)+(-8)\times(-4)=-32+32=0$
2. $\overrightarrow{AB}(-6;2)$ et $\overrightarrow{DC}(-6.2)$ donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$
3. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
   Or $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}=0$ donc les diagonales (BD) et (AC) sont perpendiculaire.
   On déduit que le parallélogramme ABCD est un losange.
   Comme $BD=\sqrt{8^2+(-8)^2}=\sqrt{128}$ et $AC=\sqrt{(-4)^2+(-4)^2}=\sqrt{32}\neq\sqrt{128}$ on déduit que le losange ABCD 'est pas un carré.

Exercice 5

Soient les points $A(-2;1)$, $B(6;2)$ et $C(4;5)$.

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en C.
2. Déterminer le centre et le rayon de son cercle circonscrit.

Correction

1. $\overrightarrow{CA}(-6;-4)$ et $\overrightarrow{CB}(2;-3)$.
   $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=(-6)\times2+(-4)\times(-3)=-12+12=0$

   Conclusion : ABC est un triangle rectangle en C.

2. ABC est rectangle en C donc le centre de son cercle circonscrit est le milieu de son hypoténuse [AB] soit $K(\frac{-2+6}{2};\frac{1+2}{2})$ soit $K(2;\frac{3}{2})$
   Le rayon du cerccle circonscrit vaut alors $\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(6+2)^2+(2-1)^2}}{2}=\frac{\sqrt{8^2+1^2}}{2}=\frac{\sqrt{65}}{2}$

Exercice 6

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui vérifie $\|\vec{u}\|=4$, $\|\vec{v}\|=3$ et $\vec{u}.\vec{v}=6$. Calculer les réels suivants :

1. $(2\vec{u}+3\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})$
2. $(-\vec{u}+\vec{v}).(4\vec{u}+\vec{v})$
3. $(\vec{u}+2\vec{v})^2$

Correction

1. $(2\vec{u}+3\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=2\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+3\vec{v}.\vec{u}-3\vec{v}^2=2\|\vec{u}\|^2+\vec{u}.\vec{v}-3\|\vec{v}\|^2$
   $(2\vec{u}+3\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=2\times4^2+6-3\times3^2=32+6-27=11$
2. $(-\vec{u}+\vec{v}).(4\vec{u}+\vec{v})=-4\vec{u}^2-\vec{u}.\vec{v}+4\vec{v}.\vec{u}+\vec{v}^2=-4\|\vec{u}\|^2+3\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$
   $(-\vec{u}+\vec{v}).(4\vec{u}+\vec{v})=-4\times4^2+3\times6+3^2=-64+18+9=-37$
3. $(\vec{u}+2\vec{v})^2=\vec{u}^2+4\vec{u}.\vec{v}+4\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2+4\vec{u}.\vec{v}+4\|\vec{v}\|^2=4^2+4\times6+4\times3^2=16+24+36=76$

Exercice 7

Soit trois points A, B, C. On suppose que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=5$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-4$.
Calculer la longueur du segment [AB].

Correction

$$\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=5+4=9 \text{ donc } AB=\sqrt{9}=3$$

Exercice 8

ABC est un triangle équilatéral de côté 5. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Correction

ABC est équilatéral de côté 5 donc $AB=AC=BC=5$ et $\widehat{BAC}=\widehat{ABC}=\widehat{ACB}=60°$ d'où :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})=5\times5\times\frac{1}{2}=\frac{25}{2}$$