Exercice 1

On considère trois points A,B et C. Dans chacun des cas suivants, calculer $\vec{AB}.\vec{AC}$

1. AB = 6, AC = 7 et $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{3}$
2. AB = 5, AC = 7 et $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{2}$
3. AB = 5, AC = 6 et $\widehat{BAC}=\frac{5\pi}{6}$

Correction

1. $\vec{AB}.\vec{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})=6\times7\times\cos(\frac{\pi}{3})=42\times\frac{1}{2}=21$
2. $\vec{AB}.\vec{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})=5\times7\times\cos(\frac{\pi}{2})=35\times0=0$
3. $\vec{AB}.\vec{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})=5\times6\times\cos(\frac{5\pi}{6})=30\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})=-15\sqrt{3}$

Exercice 2

ABC est un triangle équilatéral de côté 5 et I le milieu de [BC].

1. Montrer que $AI=\frac{5\sqrt{3}}{2}$
2. Calculer $\vec{CA}.\vec{CB}$, $\vec{CA}.\vec{AB}$, $\vec{CA}.\vec{BA}$, $\vec{AB}.\vec{AI}$, $\vec{CI}.\vec{CA}$ et $\vec{IB}.\vec{BC}$

Correction

ABC est un triangle équilatéral de côté 5 donc $AB=AC=BC=5$ et $\widehat{BAC}=\widehat{ABC}=\widehat{ACB}=60°$.

On déduit que $\vec{CA}.\vec{CB}=\vec{AB}.\vec{AC}=\vec{BA}.\vec{BC}=5\times5\times\cos(60°)=25\times\frac{1}{2}=\frac{25}{2}$

1. $\vec{CA}.\vec{CB}=\frac{25}{2}$ d'après la remarque ci-dessous.

   $\vec{CA}.\vec{AB}=-\vec{AC}.\vec{AB}=\frac{-25}{2}$ d'après la remarque ci-dessous

   $\vec{CA}.\vec{BA}=\vec{AC}.\vec{AB}=\frac{25}{2}$ d'après la remarque ci-dessous

   $\vec{AB}.\vec{AI}=\vec{AI}.\vec{AI}=\vec{AI}^2=AI^2=(\frac{5\sqrt{3}}{2})^2=\frac{25\times3}{4}=\frac{75}{4}$

   car I est le projeté orthogonal de A sur (BC) (car ABC est équilatéral).

   $\vec{CI}.\vec{CA}=\vec{CI}.\vec{CI}=\vec{CI}^2=(\frac{5}{2})^2=\frac{25}{4}$

   car I est le projeté orthogonal de A sur (BC) (car ABC est équilatéral).

   $\vec{IB}.\vec{BC}=-IB\times BC=-\frac{5}{2}\times5=\frac{-25}{2}$ car $\vec{IB}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires de sens contraires.

Exercice 3

Soit I le milieu d'un segment [AB] de longueur 6. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$.

Correction

I le milieu d'un segment [AB] de longueur 6 donc $IA=IB=3$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}=AB\times AI=6\times 3=18$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires de même sens.

$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=-IA\times IB=-3\times 3=-9$ car $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont colinéaires de sens contraires.

Exercice 4

On considère un triangle ABC.

1. Calculer la valeur de $\cos(\widehat{ACB})$ puis un arrondi au degré près de l'angle $\widehat{ACB}$ sachant que $CA=8, CB=4$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=12$.
2. Calculer AB sachant que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=10$, $AC=4$ et $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{3}$.

Correction

1. $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA\times CB\times\cos(\widehat{ACB})$ donc
   $12=8\times 4\times\cos(\widehat{ACB})=32\times\cos(\widehat{ACB})$ donc
   $\cos(\widehat{ACB})=\frac{12}{32}=\frac{3}{8}$ donc $\widehat{ACB}\approx 68°$ arrondi au degré près.
2. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$ donc
   $10=AB\times 4\times\cos(\frac{\pi}{3})=AB\times 4\times\frac{1}{2}=2\times AB$ donc $AB=\frac{10}{2}=5$

Exercice 5

Soit GHI un triangle isocèle en H. Calculer HI sachant que $\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{HG}=18\sqrt{3}$ et $\widehat{IHG}=\frac{\pi}{6}$

Correction

GHI un triangle isocèle en H donc $HG=HI$. On a :

$\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{HG}=HI\times HI\times\cos(\widehat{IHG})=IH^2\times\cos(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}\times HI^2$ donc

$18\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times HI^2$ donc $HI^2=\frac{18\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=36$ donc $HI=6$

Exercice 6
EFG est un triangle dans lequel on note H le pied de la hauteur issue de F avec H sur [EG].
On suppose que EF = 4, EH = 2 et HG = 5.
Calculer $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{\mathrm{GE}}.\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{HF}.\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{\mathrm{GE}}.\overrightarrow{FG}$.

Correction

$\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{EH}^2=2^2=4$ car H est le projeté orthogonal de F sur (EG).

$\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{EG}=EH\times EG=2\times 7=14$ car H est le projeté orthogonal de F sur (EG) et les vecteurs $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires de même sens.

$\overrightarrow{\mathrm{GE}}.\overrightarrow{GH}=\mathrm{GE}\times GH=7\times 5=35$ car les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{GE}}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont colinéaires de même sens.

$\overrightarrow{HF}.\overrightarrow{HE}=0$ car H est le projeté orthogonal de F sur (EG).

$\overrightarrow{\mathrm{GE}}.\overrightarrow{FG}=-\overrightarrow{\mathrm{GE}}.\overrightarrow{GF}=-\overrightarrow{\mathrm{GE}}.\overrightarrow{GH}=-35$ car H est le projeté orthogonal de F sur (EG) .

Exercice 7
On se place dans un repère orthonormé.
Dans chacun des cas, calculer $\vec{u}.\vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$:

1. $\vec{u}(-2;2)$ et $\vec{v}(3;6)$ 2. $\vec{u}(11;8)$ et $\vec{v}(2;1)$

Correction

1. $\vec{u}.\vec{v}=(-2)\times 3+2\times 6=-6+12=6$
   $\|\vec{u}\|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ et $\|\vec{v}\|=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

2. $\vec{u}.\vec{v}=11\times 2+8\times 1=22+8=30$
   $\|\vec{u}\|=\sqrt{11^2+8^2}=\sqrt{121+64}=\sqrt{185}$ et $\|\vec{v}\|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$