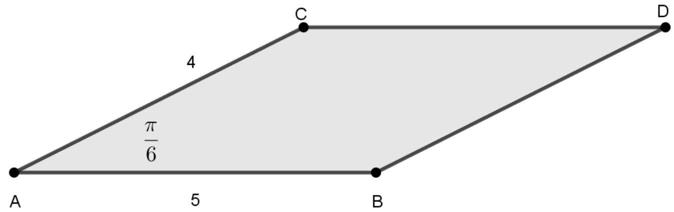
Exercice 1 :

ABDC est un parallélogramme tel que $AB=5$, $AC=4$ et $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{6}$. Calculer :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CD}$

Correction

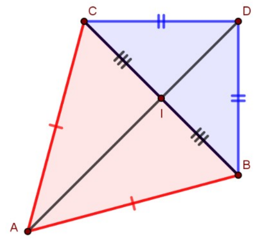


$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=5\times4\times\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=20\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=AB^2=5^2=25$$

$$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-10\sqrt{3}$$

Exercice 2 :
Le triangle ABC est équilatéral de côté 4cm. Le triangle BCD est isocèle en D et BD = 3. A l'aide de la figure ci-contre :



1. Démontrer que les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires .
2. Calculer $\vec{AD}.\vec{BC}$
3. Calculer $\vec{CI}.\vec{BI}$ puis $\vec{CI}.\vec{BD}$
4. Calculer $\vec{IA}.\vec{ID}$ puis $\vec{IA}.\vec{BD}$
5. En déduire $\vec{BD}.\vec{CA}$

Correction

1. ABC est équilatéral donc isocèle en A donc A appartient à la médiatrice de [BC].
BCD est isocèle en D donc D appartient à la médiatrice de [BC].
On déduit que (AD) est la médiatrice de [BC] et par conséquent (AD) et (BC) sont perpendiculaires.

2. (AD) et (BC) sont perpendiculaires donc $\vec{AD}.\vec{BC}=0$.

3. $\vec{CI}.\vec{BI}=-IC\times IB$ car $\vec{CI}$ et $\vec{BI}$ sont colinéaires de sens contraires.
$\vec{CI}.\vec{BI}=-IC\times IB=-2\times 2=-4$

$\vec{CI}.\vec{BD}=\vec{CI}.\vec{BI}=-4$ car I est le projeté orthogonal de D sur (CI).

4. $\vec{IA}.\vec{ID}=-IA\times ID$ car $\vec{IA}$ et $\vec{ID}$ sont colinéaires de sens contraires.
Or, d'après la théorème de Pythagore dans le triangle AIB rectangle en I, on a :
$AB^2=AI^2+IB^2$ donc $4^2=AI^2+2^2$ donc $AI^2=16-4=12$ donc $AI=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

De même, dans le triangle BDI rectangle en I, d'après le théorème de Pythagore on a :
$ID^2=3^2-2^2=9-4=5$ donc $ID=\sqrt{5}$.

On déduit que $\vec{IA}.\vec{ID}=-IA\times ID=-2\sqrt{3}\times\sqrt{5}=-2\sqrt{15}$.

$\vec{IA}.\vec{BD}=\vec{IA}.\vec{ID}=-2\sqrt{15}$ car I est le projeté orthogonal de B sur (IA).

5. $\vec{BD}.\vec{CA}=\vec{BD}.(\vec{CI}+\vec{IA})=\vec{BD}.\vec{CI}+\vec{BD}.\vec{IA}=-4-2\sqrt{15}$

Exercice 3 :
A l'aide des formules de bilinéarité du produit scalaire, calculer :

$(\vec{u}+\vec{v})^2$	$(\vec{u}-\vec{v})^2$	$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})$

1. Qu'observez-vous ?
2. A l'aide des expressions de $(\vec{u}+\vec{v})^2$ et $(\vec{u}-\vec{v})^2$ en déduire une nouvelle expression de $\vec{u}.\vec{v}$

Correction

1.

$$(\vec{u}+\vec{v})^2=(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}.\vec{u}+\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}.\vec{u}+\vec{v}.\vec{v}=\vec{u}^2+\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$$

$$(\vec{u}-\vec{v})^2=(\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}.\vec{u}-\vec{u}.\vec{v}-\vec{v}.\vec{u}+\vec{v}.\vec{v}=\vec{u}^2-\vec{u}.\vec{v}-\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$$

$$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}.\vec{u}-\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}.\vec{u}-\vec{v}.\vec{v}=\vec{u}^2-\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\vec{u}^2-\vec{v}^2$$

Par analogie, on retrouve les identités remarquables dans $\mathbb{R}$.

2. On déduit que $(\vec{u}+\vec{v})^2-(\vec{u}-\vec{v})^2=4\vec{u}.\vec{v}$ donc $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{4}\left((\vec{u}+\vec{v})^2-(\vec{u}-\vec{v})^2\right)$

Exercice 4 :
Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-5;7); B(6;-3)$ et $C(-1;4)$.
Calculer $\vec{AB}.\vec{AC}$; $\vec{AB}.\vec{BC}$ et $\vec{AC}.\vec{CB}$

Correction

On a $\vec{AB}(11;-10); \vec{AC}(4;-3)$ et $\vec{BC}(-7;7)$. Le repère étant orthonormé, on déduit :

$\vec{AB}.\vec{AC}=11\times4+(-10)\times(-3)=44+30=74$

$\vec{AB}.\vec{BC}=11\times(-7)+(-10)\times7=-77-70=-147$

$\vec{AC}.\vec{CB}=4\times7+(-3)\times(-7)=28+21=49$

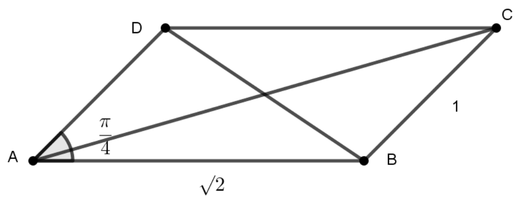
Exercice 5 :
Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(0;-1); B(-7;-2); C(-9;12)$ et $D(-6;-9)$. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Correction

On a $\vec{AB}(-7;-1); \vec{CD}(3;-21)$. Le repère étant orthonormé, on déduit :

$\vec{AB}.\vec{CD}=(-7)\times3+(-1)\times(-21)=-21+21=0$ donc $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont orthogonaux donc les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 6 :
Dans le parallélogramme ABCD ci-contre, calculer AC.

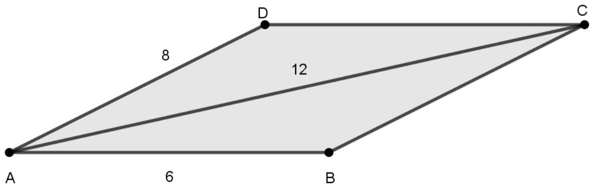


Correction
ABCD est un parallélogramme donc $\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{AD}$ donc
$AC^2=(\vec{AB}+\vec{AD})^2=AB^2+2\vec{AB}.\vec{AD}+AD^2$

$$AC^2=\sqrt{2}^2+2\sqrt{2}\times1\times\cos(\frac{\pi}{4})+1^2=2+2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+1=2+2+1=5 \text{ donc } AC=\sqrt{5}$$

Exercice 7 :
ABCD est un parallélogramme tel que $AB=6,AD=8\, et\, AC=12$. Calculer $\vec{AB}.\vec{CA}$

Correction

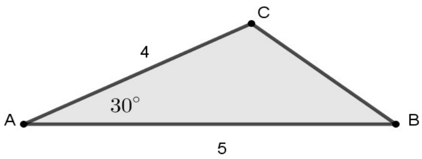


$\vec{AB}+\vec{CA}=\vec{CA}+\vec{AB}=\vec{CB}$ d'où :
$\vec{CB}^2=(\vec{AB}+\vec{CA})^2$
$CB^2=AB^2+2\,\vec{AB}.\vec{CA}+CA^2$

$$\vec{AB}.\vec{CA}=\frac{1}{2}(CB^2-AB^2-CA^2)=\frac{1}{2}(8^2-6^2-12^2)=\frac{1}{2}(64-36-144)=\frac{1}{2}\times(-116)=-58$$

Exercice 8 :
Dans un triangle ABC , on a $AB=5\,;AC=4$ et $\hat{A}=30°$. Calculer BC .

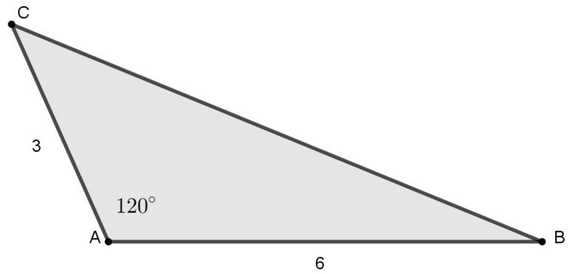
Correction
Dans le triangle ABC, d'après le théorème d'Al-Kashi :



$$BC^2=AB^2+AC^2-2\,AB\,AC\cos(\widehat{BAC})$$
$$BC^2=5^2+4^2-2\times5\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=25+16-20\sqrt{3}=41-20\sqrt{3}$$
$$BC=\sqrt{41-20\sqrt{3}}$$

Exercice 9 :
Dans un triangle ABC , on a $AB=6\,;AC=3$ et $\hat{A}=120°$. Calculer BC .

Correction
Dans le triangle ABC, d'après le théorème d'Al-Kashi :



$$BC^2=AB^2+AC^2-2\,AB\,AC\cos(\widehat{BAC})$$
$$BC^2=6^2+3^2-2\times6\times3\times(-0,5)$$
$$BC^2=36+9+18=63$$
$$BC=\sqrt{63}=3\sqrt{7}$$

Exercice 10 :

Dans un triangle ABC , on a $AB=10\,;AC=13$ et $BC=12$. Calculer $\hat{A}$ au degré près.

Correction

Dans le triangle ABC, d'après le théorème d'Al-Kashi :

$BC^2=AB^2+AC^2-2\,AB\,AC\cos(\widehat{BAC})$

$12^2=10^2+13^2-2\times10\times13\times\cos(\widehat{BAC})$

$144=100+169-260\cos(\widehat{BAC})$

$\cos(\widehat{BAC})=\dfrac{144-100-169}{-260}=\dfrac{-125}{-260}$ d'où $\widehat{BAC}\approx61°$