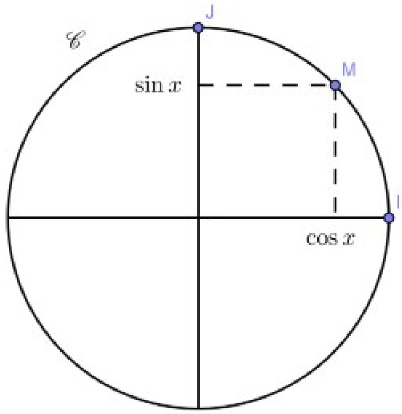
Chapitre 8 : Fonctions trigonométriques

I. Fonctions sinus et cosinus

1. Définition

Définition:

- La fonction sinus est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x associe $\sin(x)$
- La fonction cosinus est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x associe $\cos(x)$



2. Périodicité

Définition : Étant donné un réel T et une fonction définie sur un domaine D telle que $\forall x \in D, x+T \in D$ et $f(x+T)=f(x)$ est dite $T-$périodique

Propriété : Les fonctions sinus et cosinus sont dites $2\pi-$périodiques c'est à dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x+2\pi)=\cos(x) \text{ et } \sin(x+2\pi)=\sin(x)$$

Remarques:

- *Si un point* $M(x;\cos(x))$ *appartient à la courbe représentative de la fonction cosinus alors le point* $M'(x+2\pi;\cos(x))$ *appartient aussi à la courbe représentative de la fonction cosinus.*
- *De même, si un point* $N(x;\sin(x))$ *appartient à la courbe représentative de la fonction sinus alors le point* $N'(x+2\pi;\sin(x))$ *appartient aussi à la courbe représentative de la fonction sinus.*
- *On a notamment* $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{NN'}=2\pi\vec{i}$.
- *On passe donc du point* M *au point* M' *(respectivement du point* N *au point* N' *) par la translation de vecteur* $2\pi\vec{i}$

Exercice 1 :
Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1+\cos(2x)$ est $\pi-$périodique .

Exercice 2 :
Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin(2\pi x)$ est $1-$périodique .

Exercice 3 :
Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\pi-\cos(4x)$ est $\frac{\pi}{2}-$périodique .

Exercice 4 :
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-\sin(x)$ est-elle $2\pi-$périodique ?

3. Parité

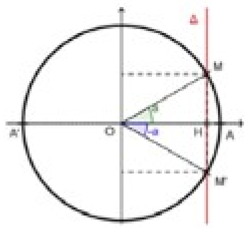
Propriété : La fonction cosinus est dite **paire** c'est à dire :

$$\forall x\in\mathbb{R}, -x\in\mathbb{R} \text{ et } \forall x\in\mathbb{R}, \cos(-x)=\cos(x)$$

Propriété : La fonction sinus est dite **impaire** c'est à dire :

- $\forall x\in\mathbb{R}, -x\in\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}, \sin(-x)=-\sin(x)$

Démonstration :
Les points M et M' respectivement associés aux réels x et $-x$ sur le cercle trigonométrique sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses (Ox) donc leurs abscisses sont égales donc $\cos(-x)=\cos(x)$ et leurs ordonnées sont opposées donc $\sin(-x)=-\sin(x)$



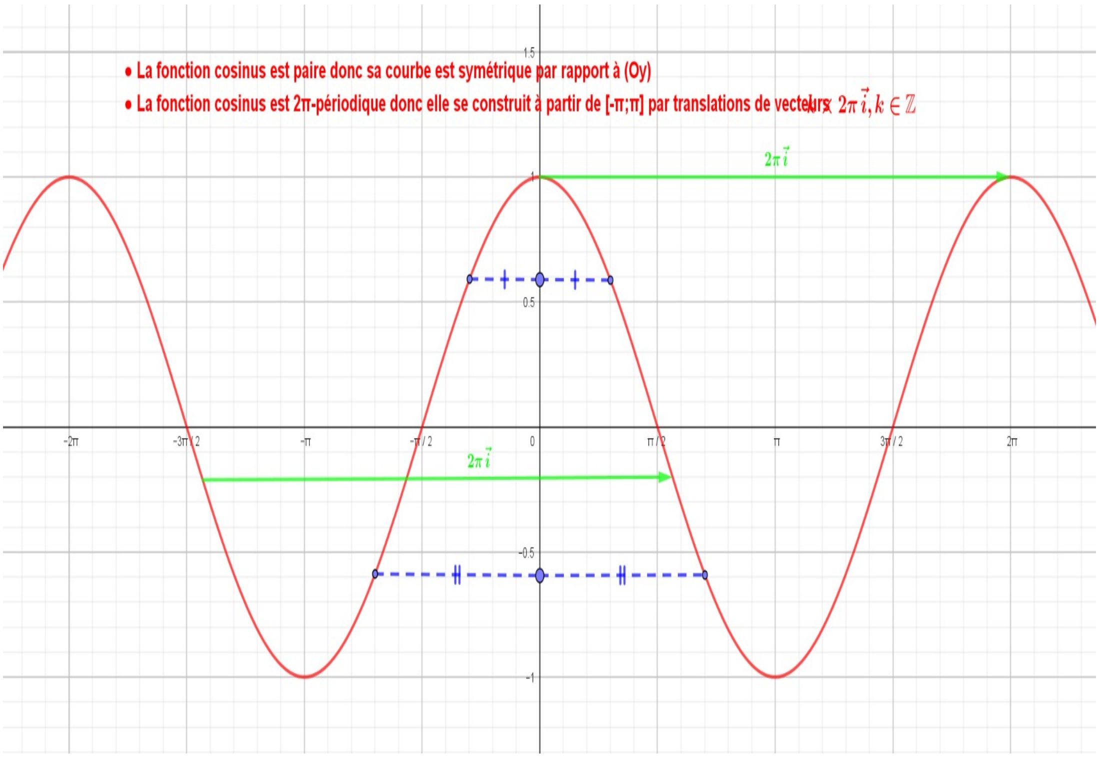
#

Remarques:
- *Dire que* $\forall x\in\mathbb{R}, -x\in\mathbb{R}$ *revient à dire que* $\mathbb{R}$ *est symétrique par rapport à 0.*
- *La courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe (Oy)*
- *la courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine O du repère.*

Exercice 5 :
Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin(4x)$ est impaire et en déduire une propriété géométrique de C_f .

Exercice 6 :
Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos(x)+\sin(x)$ est ni paire ni impaire.

II. Courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus



Voir ci-après les courbes représentatives de ces deux fonctions et leurs propriétés géométriques.