Exercice 1 :
Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1+\cos(2x)$ est $\pi-$périodique .

Correction
f est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel $x\in\mathbb{R}, x+\pi\in\mathbb{R}$ et on a :
$f(x+\pi)=1+\cos(2(x+\pi))=1+\cos(2x+2\pi)=1+\cos(2x)=f(x)$
car la fonction cosinus est $2\pi-$périodique .

Conclusion : f est $2\pi-$périodique .

Exercice 2 :
Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin(2\pi x)$ est $1-$périodique .

Correction
f est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel $x\in\mathbb{R}, x+1\in\mathbb{R}$ et on a :
$f(x+1)=\sin(2\pi(x+1))=\sin(2\pi x+2\pi)=\sin(2\pi x)=f(x)$
car la fonction sinus est $2\pi-$périodique .

Conclusion : f est $1-$périodique .

Exercice 3 :
Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\pi-\cos(4x)$ est $\frac{\pi}{2}-$périodique .

Correction
f est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel $x\in\mathbb{R}, x+\frac{\pi}{2}\in\mathbb{R}$ et on a :
$f(x+\frac{\pi}{2})=\pi-\cos(4(x+\frac{\pi}{2}))=\pi-\cos(4x+2\pi)=\pi-\cos(4x)=f(x)$
car la fonction cosinus est $2\pi-$périodique .

Conclusion : f est $\frac{\pi}{2}-$périodique .

Exercice 4 :
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-\sin(x)$ est-elle $2\pi-$périodique ?

Correction
Pour $x=0$ on a $f(0)=0-\sin(0)=0$ et pour $x=2\pi$ on a $f(2\pi)=2\pi-\sin(2\pi)=2\pi\neq0$
donc f n'est pas $2\pi-$périodique .

Exercice 5 : Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin(4x)$ est impaire et en déduire une propriété géométrique de C_f .
Correction f définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x)=\sin(4\times(-x))=\sin(-4x)=-\sin(4x)=-f(x)$ car la fonction sinus est impaire Conclusion : f est impaire.

Exercice 6 : Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos(x)+\sin(x)$ est ni paire ni impaire.
Correction $f(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ et $f(-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$. Or $0\neq\sqrt{2}$ et $0\neq-\sqrt{2}$ donc f est ni paire ni impaire.