

**Exercice 1**

1. Démontrer que la somme de deux nombres pairs est un nombre pair.
2. Démontrer que le produit de deux nombres impairs est un nombre impair.
3. Reproduire et compléter les tableaux suivants :

+	Pair	Impair
Pair		
Impair		

x	Pair	Impair
Pair		
Impair		

**Exercice 2**

1. Donner deux nombres impairs consécutifs et vérifier que leur somme est divisible par 4.
2. Démontrer, dans le cas général, que la somme de deux nombres impairs consécutifs est divisible par 4.

**Exercice 3**

Démontrer que la somme des carrés de quatre entiers consécutifs est divisible par 2.

**Exercice 4**

Dans chacun des cas suivants, déterminer tous les entiers naturels  $n$  tels que :

1. 11 divise  $n+3$
2. 6 divise  $3n-9$

**Exercice 5**

Dans chacun des cas suivants, déterminer tous les entiers naturels  $n$  tels que :

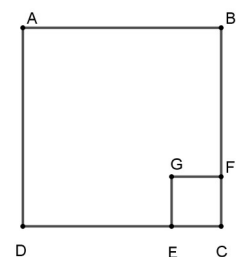
1.  $n+6$  soit divisible par  $n$
2.  $n+11$  soit divisible par  $n-1$
3.  $n-3$  divise  $n+2$

**Exercice 6**

Déterminer tous les entiers naturels  $x$  et  $y$  tels que  $x^2 - 4y^2 = 36$ .

**Exercice 7**

$ABCD$  est un carré de côté  $x$  cm avec  $x \in \mathbb{N}$  et  $ECFG$  est un carré de côté 3 cm. Déterminer les valeurs possibles de  $x$  afin que l'aire du polygone  $ABFGED$  soit égale à celle d'un carré de côté  $y$  avec  $y \in \mathbb{N}$ .



**Exercice 8**

On définit la fonction  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  par  $f(n) = \frac{3n^2 + 2n - 1}{n+4}$ .

1. Déterminer les nombres  $a, b$  et  $c$  tels que  $f(n) = an + b + \frac{c}{n+4}$ .
2. Pour quelles valeurs de  $n$ , l'image de  $n$  par la fonction  $f$  est-elle un entier ?

**Exercice 9**

1. Déterminer les diviseurs de 24.
2. Quels sont les entiers naturels  $n$  tels que  $n^2 - 24$  soit le carré d'un entier naturel ?

**Exercice 10**

Soit  $P(x) = ax^2 + bx + c$  un polynôme du second degré à coefficient entiers avec  $a \neq 0$ .

1. Rappeler sans la démontrer, à quelle condition,  $P$  admet-il exactement deux racines réelles distinctes ?
2. On suppose que  $P$  admet exactement deux racines réelles distinctes  $x_1$  et  $x_2$  avec  $x_1 \in \mathbb{Z}$ . Démontrer que  $x_1 | c$ .
3. Sans la résoudre, préciser si l'équation  $x^2 - 7x + 3 = 0$  admet des solutions entières.
4. Déterminer les polynômes de la forme  $P(x) = ax^2 + bx + 6$  admettant deux racines entières dont l'une est 2.

**Exercice 11**

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $9^n - 2^n$  est divisible par 7.

**Exercice 12**

Soient  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ .

Démontrer que  $11 | (6a + 5b) \Leftrightarrow 11 | (5a + 6b)$ .

**Exercice 13**

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer tous les entiers naturels éventuels  $d$  tels que  $d | (n+6)$  et  $d | (2n+3)$ .
2. En déduire les couples d'entiers naturels  $(n; d)$  tels que  $d | (n+6)$  et  $d | (2n+3)$ .

**Exercice 14**

Soient  $(a, b, x, y) \in \mathbb{Z}^4$  tels que  $a = x + y$  et  $b = 2x + 3y$ .

1. Justifier que tout diviseur de  $x$  et  $y$  divise  $a$  et  $b$ .
2. Exprimer  $x$  et  $y$  en fonction de  $a$  et  $b$ .
3. Justifier que tout diviseur de  $a$  et  $b$  divise  $x$  et  $y$ .
4. Déterminer les diviseurs communs aux quatre entiers 20; 30; 50 et 130.