

Chapitre 8 : Équations polynomiales

I. Résolution des équations du second degré à coefficients réels

Dans cette partie, a , b et c désignent trois nombres réels et z est un nombre complexe.
On cherche à résoudre dans \mathbb{C} l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

Définition : On appelle discriminant du trinôme $az^2 + bz + c$ (avec $a \neq 0$) le nombre, noté Δ , défini par

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Théorème : Soit $az^2 + bz + c$ (avec $a \neq 0$) un trinôme d'inconnue z dans \mathbb{C} et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$ alors le trinôme a 2 racines réelles distinctes $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$ alors le trinôme a une seule racine réelle $x_0 = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$ alors le trinôme a deux racines complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Preuve du cas $\Delta < 0$

$$P(z) = az^2 + bz + c = a\left[z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$P(z) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Si $\Delta < 0$ alors $\Delta = (i\sqrt{-\Delta})^2$ et par conséquent $P(z) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]$ qui se factorise en

$$P(z) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right) - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\right]\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\right] = a\left[z + \frac{b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right]\left[z + \frac{b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right]$$

donc le trinôme a bien deux racines complexes conjuguées $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ #

Remarque : les deux autres cas ont été démontrés en 1ère.

Exercice 1 :

Résoudre dans \mathbb{C} les équations :

$$z^2 - 6z + 25 = 0$$

$$z^4 - 4 = 0$$

$$-10z^2 + 2z - 1 = 0$$

$$z^4 + 6z^2 - 7 = 0$$

II. Équations polynomiales à coefficients réels

Définition : Étant donné un entier naturel n et $(n+1)$ nombres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ avec $\alpha_n \neq 0$, on appelle **fonction polynôme de degré n à coefficients réels** (ou polynôme de degré n), la fonction P définie sur \mathbb{C} par $P(z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k z^k$.

L'équation $P(z) = 0$ est appelée **équation polynomiale de degré n** .

Remarque : un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Définition : Lorsque $\sum_{k=0}^n \alpha_k z^k$ avec $\alpha_n \neq 0$, on note $\deg(P) = n$, le **degré du polynôme P** .

Remarque : Lorsque $\alpha_n = 1$, on dit que P est unitaire.

Propriété : Étant donnés a et z deux nombres complexes, pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$z^n - a^n = (z - a) \times \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} a^k$$

Preuve :

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} (z-a) \times \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} a^k &= \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k} a^k - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} a^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k} a^k - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-(k+1)} a^{k+1} \\ (z-a) \times \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} a^k &= \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k} a^k - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} a^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k} a^k - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-(k+1)} a^{k+1} \\ (z-a) \times \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} a^k &= \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k} a^k - \sum_{l=1}^n z^{n-l} a^l \text{ en posant } l=k+1 \\ (z-a) \times \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} a^k &= z^{n-0} \times a^0 + \sum_{k=1}^{n-1} z^{n-k} a^k - \sum_{l=1}^{n-1} z^{n-l} a^l - z^{n-n} \times a^n = z^n - a^n \end{aligned} \quad \#$$

Remarque : on dit que les sommes $\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k} a^k - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} a^{k+1}$ sont télescopiques.

Remarque : on dit que, pour tout entier naturel n non nul, $z^n - a^n$ se factorise par $z - a$.

Propriété : Soient $a \in \mathbb{C}$ et P un polynôme de degré supérieur ou égal à 1.
Si $P(a) = 0$ alors P se factorise par $z - a$ autrement dit si $P(a) = 0$ alors il existe un polynôme Q avec $\deg(Q) = \deg(P) - 1$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - a)Q(z)$.

Preuve : On considère un polynôme complexe P de degré $n \geq 1$ à coefficients réels. Il existe $n + 1$ réels $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ avec $\alpha_n \neq 0$ tels que, pour tout nombre complexe z , $P(z) = \sum_{p=0}^n \alpha_p z^p$.

Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $P(a) = 0$ alors, d'après la propriété précédente, pour tout entier naturel non nul p , $z^p - a^p = (z - a) \sum_{k=0}^{p-1} z^{p-1-k} a^k$.

Comme $P(a) = 0$, alors, pour tout nombre complexe z ,

$$P(z) = P(z) - P(a) = \sum_{p=0}^n \alpha_p z^p - \sum_{p=0}^n \alpha_p a^p = \sum_{p=0}^n \alpha_p (z^p - a^p) = \sum_{p=1}^n \alpha_p (z - a) \sum_{k=0}^{p-1} z^{p-1-k} a^k$$

$$P(z) = (z - a) \sum_{p=1}^n \alpha_p \left(\sum_{k=0}^{p-1} z^{p-1-k} a^k \right) = (z - a) \sum_{p=1}^n \alpha_p (z^{p-1} + a z^{p-2} + \dots + a^{p-2} z + a^{p-1}) = (z - a) Q(z)$$

Comme $\alpha_n \neq 0$ est non nul, Q est un polynôme de degré $(n - 1)$, d'où le résultat. #

Exercice 2 : A l'aide de la formule ci-dessus, factoriser $z^2 - a^2$; $z^3 - a^3$; $z^4 - a^4$ et $z^5 - a^5$.

Propriété : Pour tout entier naturel n , un polynôme de degré n admet au plus n racines.

Preuve : Pour $n \in \mathbb{N}$, on note R_n la proposition « Un polynôme de degré n admet au plus n racines ». Démontrons par récurrence que R_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : un polynôme de degré 0 est une constante non nulle donc n'a pas de racine donc R_0 est vraie.

Hérédité :

hypothèse de récurrence : on suppose qu'il existe un entier naturel n pour lequel R_n est vraie.

Soit P un polynôme de degré $(n + 1)$.

Si P n'a pas de racine, il en compte alors 0 et $0 < n + 1$ donc R_{n+1} est vraie.

Si P admet au moins une racine, alors, d'après la propriété précédente, il se factorise par $z - a$: il existe donc un polynôme Q de degré n , tel que, pour tout nombre complexe z ,

$$P(z) = (z - a)Q(z).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, Q a au plus n racines, ce qui fait que P en a au plus $n + 1$.

Conclusion : R_n est initialisée au rang $n = 0$ et héréditaire donc vraie pour tout entier naturel n d'après le principe du raisonnement par récurrence. #

Exercice 3 : Soit $P(z) = z^3 - 2z^2 + z - 2$ un polynôme complexe à coefficients réels.

1. Trouver une racine réelle évidente a de P .
2. En déduire une factorisation de P par $(z - a)$.
3. En déduire toutes les racines de P .

Exercice 4 : mêmes questions avec $P(z) = 2z^3 + 3z - 5$.

Propriétés (admisses) : Formules de Viète

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k z^k$ un polynôme de degré n (avec $\alpha_n \neq 0$ alors :

- la somme des toutes ses racines est égales à $-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$
- le produit de toutes ses racines est égal à $(-1)^n \times \frac{\alpha_0}{\alpha_n}$

Application : Soient $z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = 1 - 2i$ les racines d'un polynôme unitaire P .

Comme $z_1 + z_2 = 2$ et $z_1 \times z_2 = 1^2 + 2^2 = 5$ alors z_1 et z_2 sont les racines du polynôme P sur \mathbb{C} défini par $P(z) = z^2 - 2z + 5$.

Résumé du cours sur les nombres complexes par carte mentale

