La calculatrice est interdite

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0=0$ et pour tout entier naturel n, $z_{n+1}=(1+i)z_n-i$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n. On note B le point d'affixe 1.

1. (a) Montrer que $z_1=-i$ et que $z_2=1-2i$.
(b) Calculer z_3.
(c) Dans le repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ ci-dessous, placer les points B, A_1, A_2 et A_3.
(d) Démontrer que le triangle B A_1A_2 est isocèle rectangle.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=|z_n-1|$.
(a) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1}=\sqrt{2}\ u_n$.
(b) Déterminer à partir de quel entier naturel n, la distance BA_n est strictement supérieure à 1000.
On détaillera la méthode utilisée.
Indication : $\dfrac{\ln(1000)}{\ln(\sqrt{2})}\approx 19{,}9$

3. (a) Déterminer rigoureusement la forme exponentielle de $1+i$.
(b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $z_n=1-(\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$.
(c) Le point A_{2020} appartient-il à l'axe des abscisses ? Justifier.

Annexe