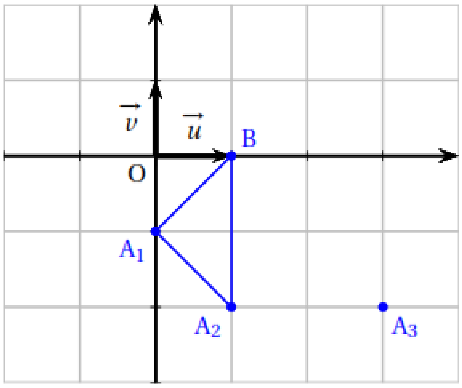
La calculatrice est interdite

1. (a) $z_1=(1+i)z_0-i=(1+i)\times 0-i=-i$

$z_2=(1+i)z_1-i=(1+i)(-i)-i=-i-i^2-i=-2i+1=1-2i$.

(b) $z_3=(1+i)z_2-i=(1+i)(1-2i)-i=1-2i+i-2i^2-i=1-2i+2=3-2i$.

(c)



(d) $z_{\overrightarrow{A_1B}}=1-(-i)=1+i$ et $z_{\overrightarrow{A_1A_2}}=(1-2i)-(-i)=1-2i+i=1-i$

Or, $i\times iz_{\overrightarrow{A_1A_2}}=i(1-i)=i-i^2=i+1=z_{\overrightarrow{A_1B}}$

donc $|z_{\overrightarrow{A_1B}}|=|i\times i z_{\overrightarrow{A_1A_2}}|=|i|\times|z_{\overrightarrow{A_1A_2}}|=1\times|z_{\overrightarrow{A_1A_2}}|=|z_{\overrightarrow{A_1A_2}}|$ donc BA_1A_2 est isocèle en A_1

et $(\overrightarrow{A_1A_2};\overrightarrow{A_1B})\equiv arg(i)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc BA_1A_2 est rectangle en A_1 .

Conclusion : BA_1A_2 est rectangle et isocèle en A_1 .

2. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n=|z_n-1|$.

(a) Soit $n\in\mathbb{N}$, on a :

$u_{n+1}=|z_{n+1}-1|=|(1+i)z_n-i-1|=|(1+i)z_n-(1+i)|=|(1+i)(z_n-1)|=|1+i|\times|z_n-1|=|\sqrt{2}|\ u_n$

donc (u_n) est géométrique de raison $q=\sqrt{2}$ et de premier terme $u_0=|z_0-1|=|-1|=1$ donc $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=1\times(\sqrt{2})^n=(\sqrt{2})^n$

(b) $BA_n=|z_n-z_B|=|z_n-1|=u_n=(\sqrt{2})^n$

$BA_n>1000\Leftrightarrow u_n>1000$

$BA_n>1000\Leftrightarrow(\sqrt{2})^n>1000$

$BA_n>1000\Leftrightarrow n\times\ln(\sqrt{2})>\ln(1000)\text{ car } x\rightarrow\ln(x)\text{ strictement croissante sur }]0;+\infty[$

$BA_n>1000\Leftrightarrow n>\frac{\ln(1000)}{\ln(\sqrt{2})}\text{ car }\ln(\sqrt{2})>0$. Or, $\frac{\ln(1000)}{\ln(\sqrt{2})}\approx 19{,}9$.

Conclusion : A partir de $n=20$ on a $BA_n>1000$.

3. (a) $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

On déduit $1+i=\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4}))=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

(b) Pour tout entier naturel n ,on pose $P(n): z_n=1-(\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

Démontrons, par récurrence, que $P(n): z_n=1-(\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$ est vraie pour tout entier naturel n .

Initialisation : pour $n=0$, $1-(\sqrt{2})^0 e^{i\frac{0\times\pi}{4}}=1-1=0=z_0$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel n pour lequel $P(n)$ est vraie.

On a $z_n=1-(\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$

donc $(1+i)z_n-i=(1+i)(1-(\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}})-i$

donc $(1+i)z_n-i=(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})(1-(\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}})-i$

donc $(1+i)z_n-i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}-(\sqrt{2})^{n+1}e^{i\frac{(n+1)\pi}{4}}-i$

donc $(1+i)z_n-i=(1+i)-(\sqrt{2})^{n+1}e^{i\frac{(n+1)\pi}{4}}-i$

donc $(1+i)z_n-i=1-(\sqrt{2})^{n+1}e^{i\frac{(n+1)\pi}{4}}$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(n)$ est initialisée pour $n=0$ et héréditaire donc vraie pour tout entier naturel n d'après le principe du raisonnement par récurrence.

.

(c) $z_{2020}=1-(\sqrt{2})^{2020}e^{i\frac{2020\pi}{4}}=1-(\sqrt{2})^{2020}e^{i505\pi}=1-(\sqrt{2})^{2020}(e^{i\pi})^{505}=1-(\sqrt{2})^{2020}(-1)^{505}=1+(\sqrt{2})^{2020}$

donc $z_{2020}\in\mathbb{R}$ donc A_{2020} appartient à l'axe des abscisses.