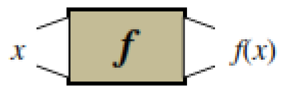
Chapitre 9 : Généralités sur les fonctions

I. Notion de fonction

Définition : Soit D un ensemble de nombres.

(1) Définir une **fonction** f , c'est donner **un procédé** qui à chaque nombre x de D associe un et un seul nombre noté $f(x)$.



(2) D est appelé **l'ensemble de définition** de la fonction f

(3) x s'appelle la variable et $f(x)$ est **l'image** de x par la fonction f

(4) Étant donné un nombre y , on appelle **antécédent** de y par la fonction f , tout nombre x de D tel que $f(x)=y$

Remarques :

- *L'ensemble de définition d'une fonction est donc l'ensemble des nombres qui ont une image par cette fonction.*
- *Un nombre x a au plus une image par une fonction c'est à dire, il ne peut pas en avoir deux ni davantage.*

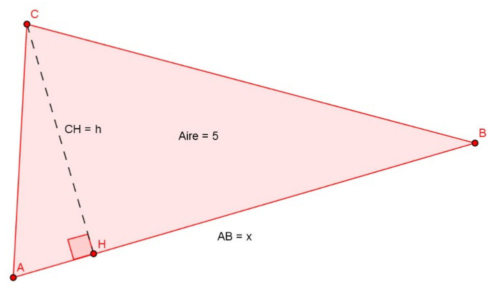
Exemples :

- Le procédé qui au côté x d'un carré associe son périmètre est une fonction.
  On la note $p:[0;+\infty[\rightarrow[0;+\infty[: x\rightarrow 4x$

- Le procédé qui au côté x d'un carré associe son aire est une fonction.
  On la note $A:[0;+\infty[\rightarrow[0;+\infty[: x\rightarrow x^2$

- Le procédé qui, à une heure associe la température est une fonction.
  Si par exemple à 12 heures, il fait 13°C alors cette fonction associe au nombre 12 le nombre 13.

Exercice 1 :
On considère un triangle ABC d'aire égale à 5. On note AB=x et h la hauteur issue de C de ce triangle.



(a) Exprimer la longueur h en fonction de x
(b) Quelle est la longueur h lorsque AB=20 ?

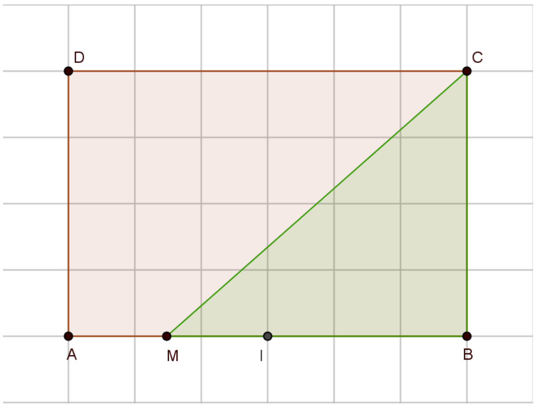
Vocabulaire :

La phrase « *soit la fonction f définie sur l'intervalle* [-2 ; 3] *par* $f(x)=x^2+x-2$ » signifie qu'à chaque nombre x de l'intervalle [-2 ; 3], on associe le nombre x^2+x-2 .

[-2 ; 3] est alors l'ensemble de définition de cette fonction.

Exercice 2 :

Dans la figure ci-contre, ABCD est un rectangle tel que AB = 6 et BC = 4. I est le milieu de [AB] et M est un point qui décrit le segment [AI] privé de A.



(a) Exprimer l'aire du triangle MBC en fonction de MB.

(b) Si l'on note x la longueur AM, à quel intervalle appartient x ?

(c) La fonction f associe au réel x l'aire du triangle MBC. Donner l'expression de f(x) et son ensemble de définition.

II. Différents moyens de définir une fonction

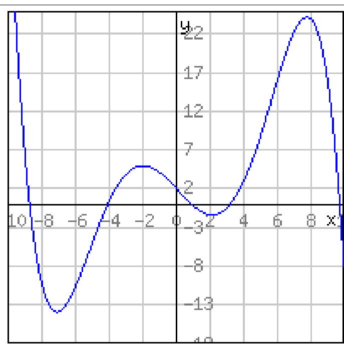
Une fonction f est définie sur un ensemble D en associant à chaque nombre réel x de D un unique réel noté f(x). Cette association peut se faire, soit à l'aide d'une courbe appelée représentation graphique de f, soit à l'aide d'un tableau de valeurs de f, soit à l'aide d'une formule appelée forme algébrique de f.

1. Fonction définie à l'aide d'une courbe

Définition : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction.

On appelle **représentation graphique ou courbe représentative** de la fonction f , l'ensemble noté C_f des points de coordonnées $(x ; y)$ où $x \in D$ et $y = f(x)$

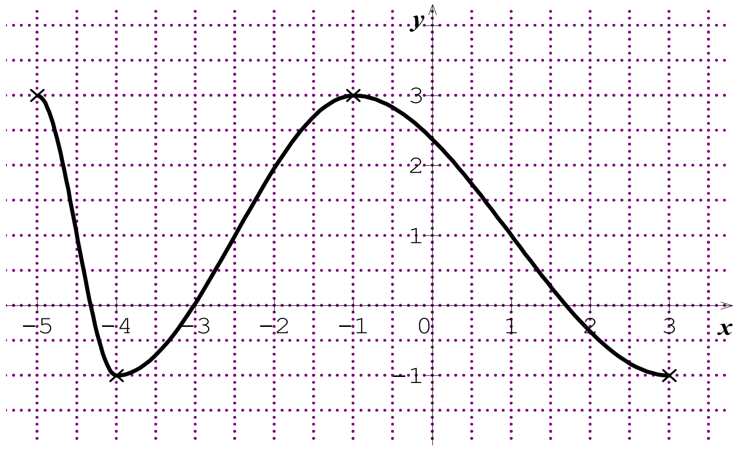
Ainsi, $\boldsymbol{M(x ; y) \in (Cf)}$ **équivaut à** $\boldsymbol{x \in D}$ **et** $\boldsymbol{y = f(x)}$



Remarque : On dit que (Cf) *a pour équation cartésienne* $y=f(x)$

Exercice 3 :
La courbe (C) représentée ci-contre est celle d'une fonction f.
Déterminer :

- Son ensemble de définition
- L'image de -4 puis de -1
- Les antécédents de – 1, de 1 et de 3



2. Fonction définie à l'aide d'un tableau de valeurs

Exercice 4 :
Afin de mieux régler son chauffage, on peut relever la t° tous les jours à une heure donnée à l'aide d'un simple thermomètre et placer ces données dans un tableau.
Voici le relevé pour la première semaine d'avril :

Nombre du jour	1	2	3	4	5	6	7
T° relevée en °C	8	3	11	5	0	-1	3

(a) A quel n^{ème} jour la T° 11°C a-t-elle été relevée ?
(b) Quelle T° est associée au 2ème et 7ème jours de cette semaine ?

Exercice 5 :
Le tableau de valeurs suivant permet d'associer, à chacun des nombres x du tableau, un nombre g(x).

x	-3	-1	0	1	1,5	2
g(x)	5	2	1	0,5	2	3

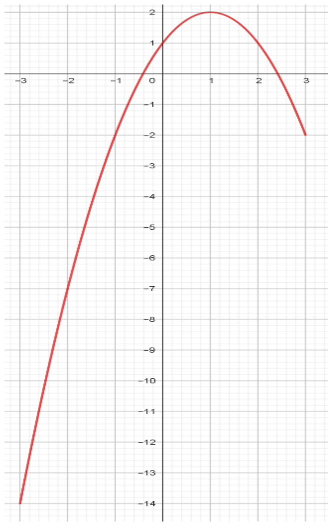
(a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction g ?
(b) Quelle est l'image de 1 ?
(c) Quels sont les antécédents de 2 ?

3. Fonction définie à l'aide d'une formule

Exercice 6 :
Soit h la fonction associant à chaque réel x, le triple de son carré augmenté de lui-même.

(a) Déterminer l'ensemble de définition de h
(b) Déterminer l'expression algébrique de h
(c) Calculer l'image de -2

Exercice 7 :
La fonction f définie sur [- 3; 3] par la courbe ci-contre.



(a) Par lecture graphique :
(a) Déterminer l'image de 1 par f , puis $f(-1)$ et $f(0)$.
(b) Déterminer le ou les antécédents de 2 par f puis le ou les antécédents de 1 par f puis le ou les antécédents de -2 par f .

(b) En utilisant le tableau de valeurs ci-dessous :
(a) Déterminer l'image de -1,5 par f , l'image de 3 par f.
(b) Déterminer le ou les antécédents de -0,25 par f

-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
-14	-10,25	-7	-4,25	-2	-0,25	1	1,75	2	1,75	1	-0,25	-2

(c) On donne maintenant la formule définissant la fonction f, $f(x)=-x^2+2x+1$.
(a) Retrouvez par le calcul tous les antécédents de 1 par f
(b) Montrer que $(x+1)(-x+3)=-x^2+2x+3$
(c) En déduire par le calcul tous les antécédents de -2 par f .
(d) Vérifier vos résultats à l'aide du tableau et de la courbe

III. Courbe représentative d'une fonction

Définition : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction.
Dans un repère du plan, on appelle **représentation graphique ou courbe représentative** de la fonction f , l'ensemble noté C_f des points du plan de coordonnées $(x ; y)$ avec $x \in D$ et $y=f(x)$.

Propriété caractéristique : $C_f=\{ M(x ; y) \text{ tels que } x \in D \text{ et } y=f(x) \}$

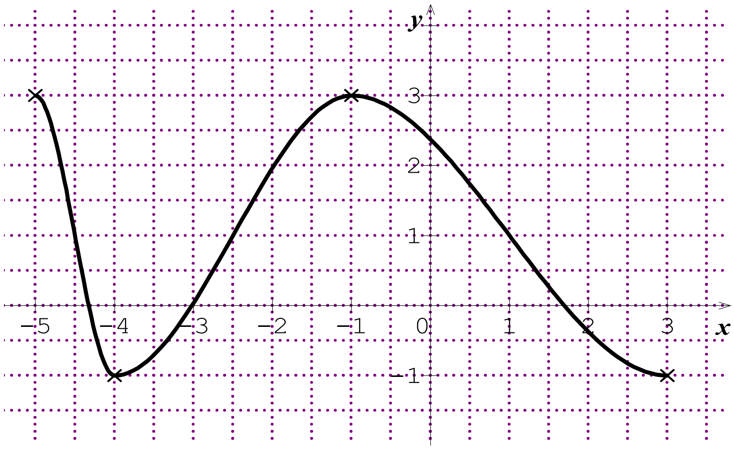
Remarques :
- $y=f(x)$ *est appelée équation de la courbe* C_f
- $y=f(x)$ *signifie que* x *est un antécédent de* y *par la fonction* f

Exercice 8 :

La courbe représentée ci-contre est celle d'une fonction f .

Déterminer :

- Son ensemble de définition
- L'image de -4 puis de -1
- Les antécédents de – 1, de 1 et de 3 par la fonction f



Exercice 9 :

On considère la fonction g définie sur l'intervalle [-2;2] par $g(x)=x^2+2x$

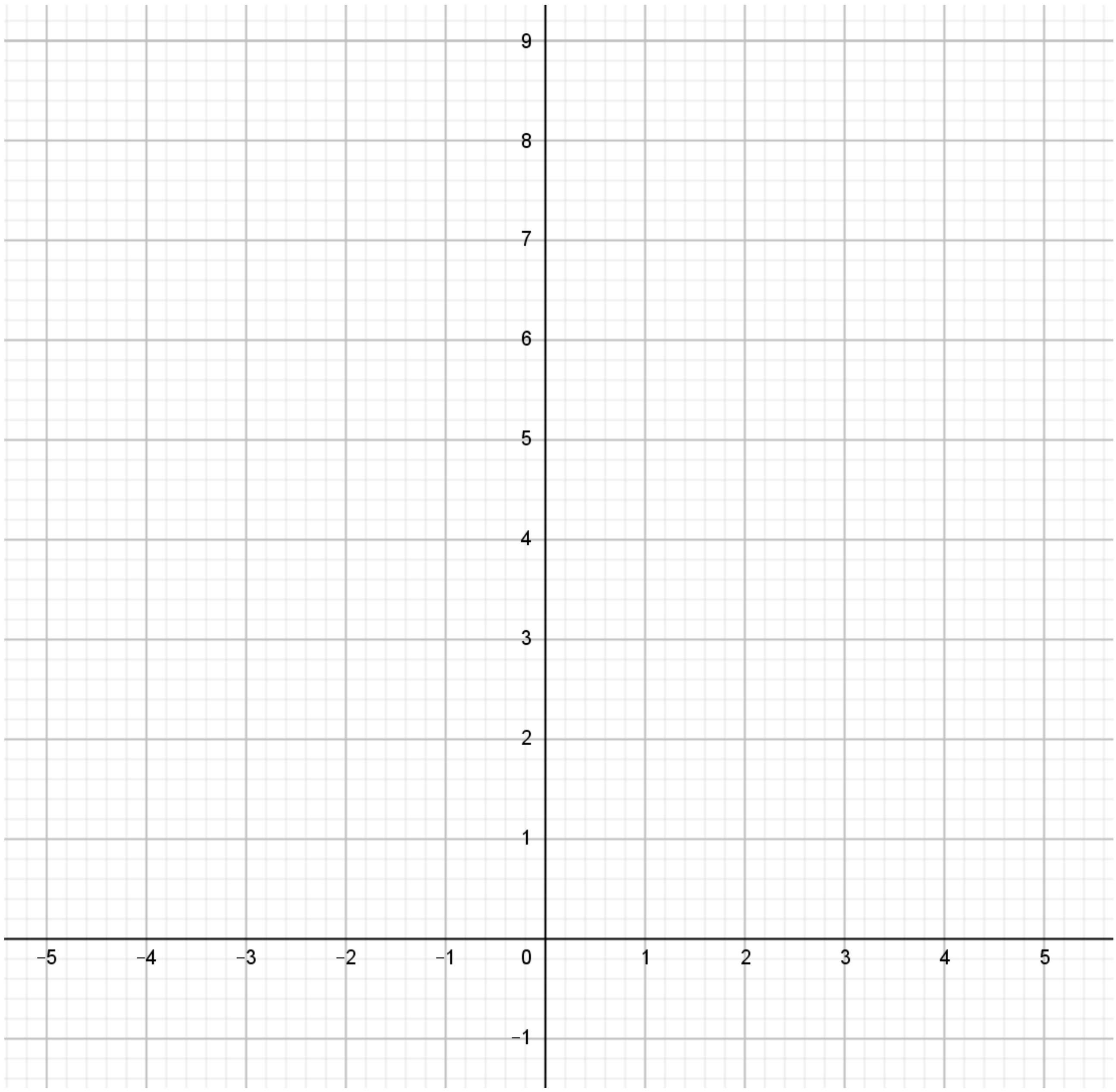
1. Sans calculatrice, compléter le **tableau de valeurs** suivant :

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$g(x)$									

2. Dans le repère en annexe, placer les points ainsi obtenus dans le tableau de valeurs. Relier ces points à main levée. Vous obtenez ainsi la courbe C_g .
3. a) Par lecture graphique, le point K(1,1 ; 4) appartient-il à C_g ?
   (b) Par lecture graphique, le point L(0,2; 1) appartient-il à C_g ?
4. Vérifier, par le calcul, les réponses données à la question 3.

Remarque : seule une droite est construite à la règle. Toute autre courbe est racée à main levée.

Annexe



IV Fonction paire – Fonction impaire

Définition : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de courbe représentative C_f .

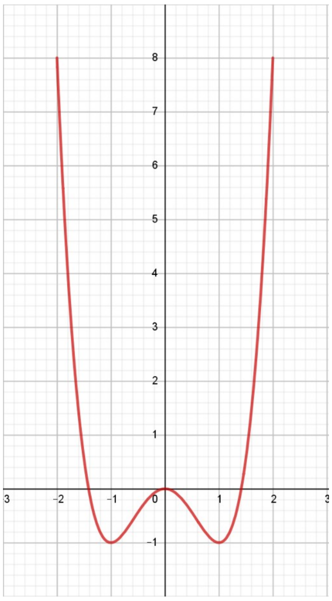
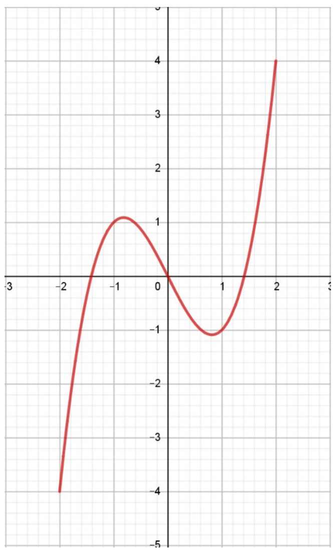
- f est dite **paire** si pour tout $x \in D, -x \in D$ et $f(-x) = f(x)$
- f est dite **impaire** si pour tout $x \in D, -x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$

Remarque : dire que pour tout $x \in D, -x \in D$ *revient à dire que* D *est symétrique par rapport à 0.*

Propriété : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de courbe représentative C_f .

- Si f est dite **paire** alors C_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées
- Si f est dite **impaire** alors C_f est symétrique par rapport à l'origine du repère

Exemple :

Fonction paire	*Fonction impaire*
	

Exercice 10 :

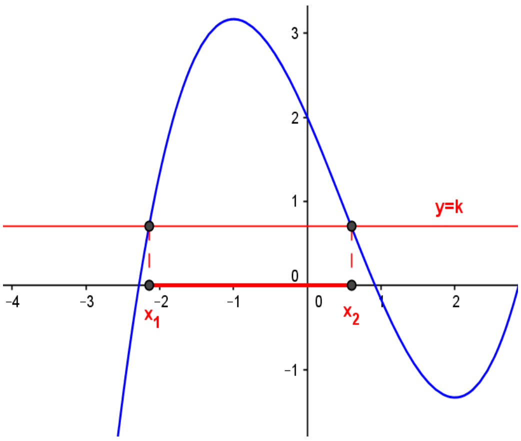
1. Sachant que les fonctions ci-dessus sont définies sur [-2;2] par $f(x) = x^4 - 2x^2$ et par $g(x) = x^3 - 2x$, montrer, par le calcul, que f est une fonction paire et g une fonction impaire.
2. Les points A(-1;-1) et B(1,5 ; 0) appartiennent-ils à C_f ? Justifier vos réponses par un calcul.
3. Calculer l'ordonnée du point C situé sur la courbe C_g dont l'abscisse est $x_c = -1$

V. Résolution graphique d'inéquations

Dans la suite, C_f et C_g désignent les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère.

1. Inéquation f(x) > k avec k réel

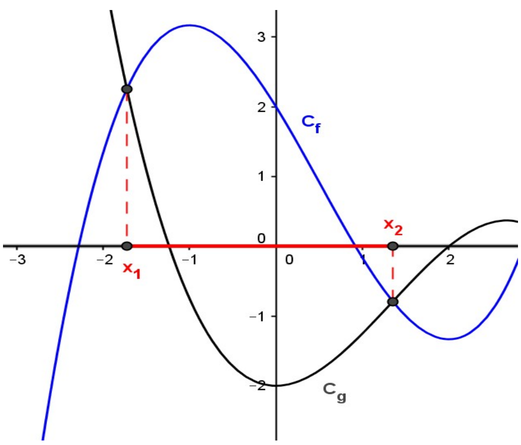
Propriété : Les solutions de l'inéquation **f(x) > k** sont les abscisses des points de la courbe C_f situés
au-dessus de la droite (d) d'équation y = k



Ci-dessus, l'ensemble des solutions de l'inéquation f(x) > k est l'intervalle $]x_1;x_2[$

2. Inéquation f(x) > g(x)

Propriété : Les solutions de l'inéquation **f(x) > g(x)** sont les abscisses des points de la courbe C_f situés **au-dessus** de la courbe C_g

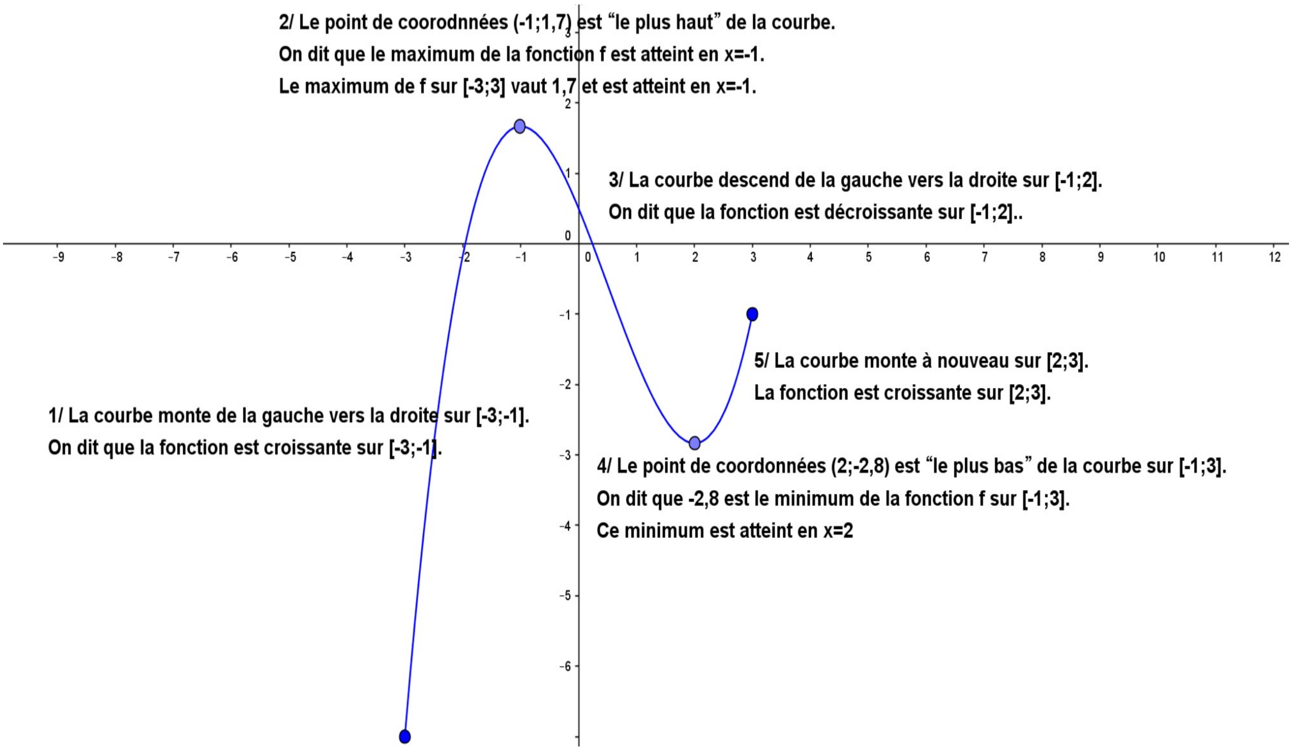


Ci-dessus, l'ensemble des solutions de l'inéquation f(x) > g(x) est l'intervalle $]x_1;x_2[$

VI. Sens de variation et extremums

1. Idées intuitives

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [-3;3] par la courbe donnée ci-dessous.
En observant la courbe de la gauche vers la droite, nous pouvons dresser plusieurs observations



On regroupe ces informations dans un tableau appelé **tableau de variations** de la fonction f.

x	−3		−1		2		3
f	−7	↗	1,7	↘	−2,8	↗	−1

Remarques : D'après ce tableau, nous pouvons aussi dire que :

- *l'image de -3 par la fonction f est -7*
- *2 est un antécédent de -2,8 par la fonction f*

2. Traduction algébrique

(a) Monotonie d'une fonction

Définition :

- Une fonction f est dite **croissante** sur un intervalle I signifie que pour tous réels a et b de I on a :
$$\boldsymbol{si\ a < b\ alors\ f(a) \leqslant f(b)}$$

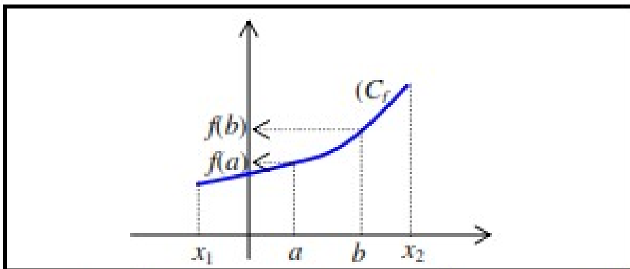
- Une fonction f est dite **décroissante** sur un intervalle I signifie que pour tous réels a et b de I on a :
$$\boldsymbol{si\ a < b\ alors\ f(a) \geqslant f(b)}$$

- Une fonction f est dite **strictement croissante** sur un intervalle I signifie que pour tous réels a et b de I on a :
$$\boldsymbol{si\ a < b\ alors\ f(a) < f(b)}$$

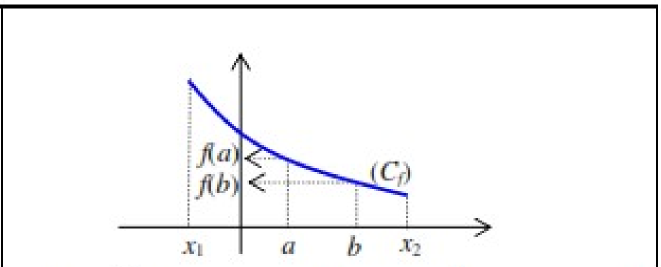
- Une fonction f est dite **strictement décroissante** sur un intervalle I signifie que pour tous réels a et b de I on a :
$$\boldsymbol{si\ a < b\ alors\ f(a) > f(b)}$$

Vocabulaire : Étudier les intervalles sur lesquels une fonction est croissante ou décroissante s'appelle l'étude de la **monotonie** de la fonction f.

Exemple : ci-dessous, dans la colonne de gauche est représentée une fonction croissante sur l'intervalle $[x_1; x_2]$ et dans la colonne de droite, une fonction décroissante sur l'intervalle $[x_1; x_2]$.



x	x_1	a	b	x_2
$f(x)$		$f(a)$	$f(b)$	



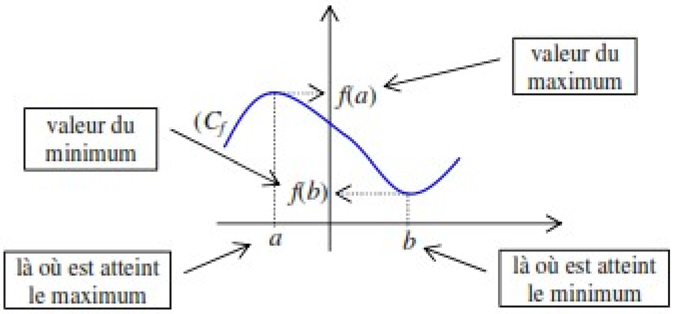
x	x_1	a	b	x_2
$f(x)$		$f(a)$	$f(b)$	

La fonction f est croissante sur $[x_1; x_2]$. Deux réels quelconques de $[x_1; x_2]$ sont rangés dans le même ordre que leurs images.	La fonction f est décroissante sur $[x_1; x_2]$. Deux réels quelconques de $[x_1; x_2]$ sont rangés dans l'ordre contraire de leurs images.

(b) Extremums d'une fonction

Définition :
Soit f une fonction définie sur un ensemble D.

- dire que f(a) est le **maximum de f sur D** signifie que **pour tout réel x de D, f(x) ≤ f(a)**
- dire que f(b) est le **minimum de f sur D** signifie que **pour tout réel x de D, f(x) ≥ f(b)**



Vocabulaire : On dit que f(c) est un extremum de f sur D pour indiquer que f(c) est un maximum ou un minimum de f sur D.

Exercice 11 :
Voici le tableau de variation d'une fonction g définie sur [-3;4]

x	-3		0		2		4
g	1	↘	-4	↗	0	↘	-3

1. Décrire les variations de la fonction g
2. Comparer, si possible et en justifiant :
   - g(-3) et g(-1)
   - g(1) et g(3)
3. Lire le maximum de g sur [0;4] et son minimum sur [-3;4]
4. Tracer une courbe susceptible de représenter graphiquement la fonction g.