Exercice 1

1. Démontrer que toute fonction linéaire définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k\times x$ avec $k\in\mathbb{R}^*$ est une fonction impaire.
2. Démontrer que la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$ une fonction paire.
3. Démontrer que la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$ une fonction impaire.
4. Démontrer que la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{1}{x}$ une fonction impaire.
5. La fonction racine carrée définie par $f(x)=\sqrt{x}$ est-elle paire, impaire, ni paire ni impaire ? Justifier.

Correction

1. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
   $\forall x\in\mathbb{R}, f(-x)=k\times(-x)=-kx=-f(x)$
   Conclusion : f est impaire.

2. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
   $\forall x\in\mathbb{R}, f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$
   Conclusion : f est paire.

3. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
   $\forall x\in\mathbb{R}, f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$
   Conclusion : f est impaire.

4. $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0.
   $\forall x\in\mathbb{R}^*, f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x)$
   Conclusion : f est impaire.

5. La fonction racine carrée est définie sur $[0;+\infty[$ qui n'est pas symétrique par rapport à 0 donc elle est ni paire ni impaire.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $[-2;2]$ par $f(x)=3x^4-2x^2+7$.

1. Démontrer que f est paire.
2. En déduire une propriété de sa courbe.

Correction

1. $[-2;2]$ est symétrique par rapport à 0.
   $\forall x\in[-2;2], f(-x)=3\times(-x)^4-2\times(-x)^2+7=3x^4-2x^2+7=f(x)$
   Conclusion : f est paire.
2. f est paire donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $[-5;5]$ par $f(x)=7x^3-x$.

1. Démontrer que f est impaire.
2. En déduire une propriété de sa courbe.

Correction

1. $[-5;5]$ est symétrique par rapport à 0.
   $\forall x\in[-5;5], f(-x)=7\times(-x)^3-(-x)=-7x^3+x$
   $\forall x\in[-5;5], -f(x)=-(7\times x^3-x)=-7x^3+x$
   On déduit que $\forall x\in[-5;5], f(-x)=-f(x)$
   Conclusion : f est impaire.
2. f est impaire donc sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère, O.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^6-3}{x^2+1}$.

1. Démontrer que f est paire.
2. En déduire une propriété de sa courbe.

Correction

1. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
   $\forall x\in\mathbb{R}, f(-x)=\dfrac{(-x)^6-3}{(-x)^2+1}=\dfrac{x^6-3}{x^2+1}=f(x)$
   Conclusion : f est paire.
2. f est paire donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{x^2+9}$.

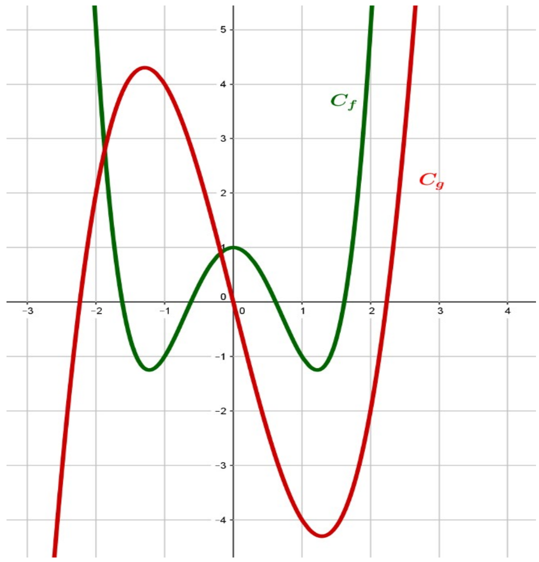
1. Démontrer que f est impaire.
2. En déduire une propriété de sa courbe.

Correction

1. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
   $\forall x\in\mathbb{R}, f(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2+9}=-\dfrac{x}{x^2+9}=-f(x)$
   Conclusion : f est impaire.
2. f est impaire donc sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère, O.

Exercice 6

Ci-contre sont construites les courbes C_f et C_g de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$.



1. Que pouvez-vous conjecturer sur la parité de ces deux fonctions. Justifier.
2. Les expressions algébriques de ces deux fonctions sont $f(x)=x^4-3\text{x}^2+1$ et $g(x)=x^3-5x$
Démontrer votre conjecture.

Correction

1. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
De plus, C_f semble symétrique par rapport à l'axe des ordonnées donc f semble paire.
et C_g semble symétrique par rapport à O donc g semble impaire.

2. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x)=(-x)^4-3(-x)^2+1=x^4-3x^2+1=f(x)$
Conclusion : f est paire.

$\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x)=(-x)^3-5\times(-x)=-x^3+5x$
$\forall x \in \mathbb{R}, -f(x)=-(x^3-5x)=-x^3+5x$
donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x)=-f(x)$
Conclusion : f est impaire.