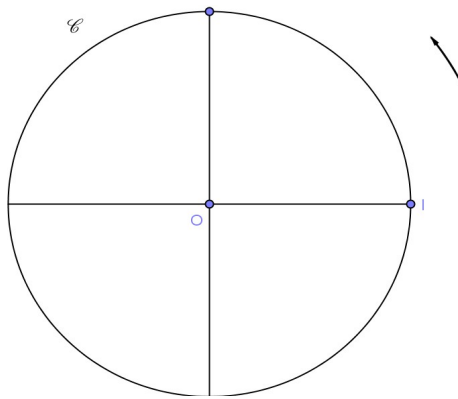


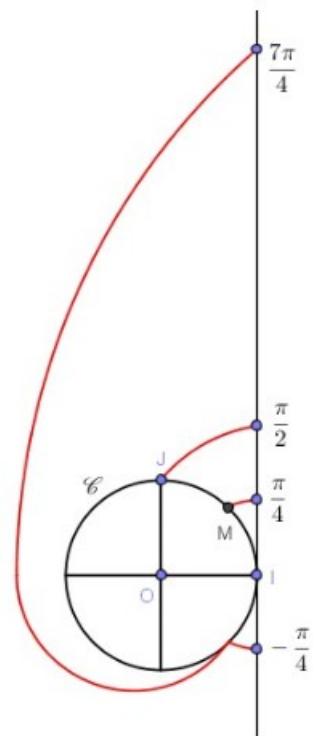
Chapitre 7 : Trigonométrie

I. Cercle trigonométrique

Définition : Soit $(O ; I , J)$ un repère orthonormé du plan. On appelle **cercle trigonométrique C** le cercle de centre O et de rayon 1 muni d'un sens positif (le sens contraire des aiguilles d'une montre) appelé sens trigonométrique ou sens direct.



Dans le plan muni du repère orthonormé $(O ; I , J)$, on considère le cercle trigonométrique C et on appelle D la droite graduée d'origine I parallèle à (OJ) . Pour tous les réels x , en enroulant cette droite sur le cercle trigonométrique, on fait correspondre au point de coordonnées $(1 ; x)$ de la droite D un point du cercle C .



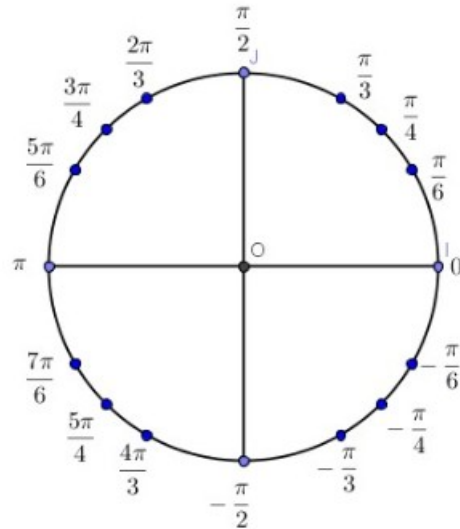
Propriété : En enroulant la droite D autour du cercle C , on associe à tout réel x un point du cercle.

Propriété : Soit M un point du cercle trigonométrique associé à un réel x . Ce point M est également associé à tous les réels de la forme $x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Remarque : quand $x \in [0 ; 2\pi]$, alors x représente la longueur de l'arc de cercle d'origine I et d'extrémité M .

Quelques positions particulières :

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angle associé en degré	30°	45°	60°	90°



Méthode - Placer un point sur le cercle trigonométrique

On veut placer le point du cercle correspondant au réel $\frac{19\pi}{6}$

Le réel étant positif, on va tourner dans le sens trigonométrique.

- Pour cela on place le point du cercle correspondant au réel $\frac{\pi}{6}$
On reporte ensuite 19 fois l'arc de cercle correspondant.

- On peut également constater que $\frac{19\pi}{6} = \frac{12\pi + 7\pi}{6} = 2\pi + \frac{7\pi}{6} = 2\pi + \pi + \frac{\pi}{6}$
On mesure ensuite, à partir du point correspondant à π , un angle de 30° .

On arrive ainsi sur le point correspondant au réel $\frac{7\pi}{6}$ sur la figure ci-dessus.

Méthode - Deux réels sont-ils représentés par un même point sur le cercle ?

On veut savoir si $\frac{35\pi}{6}$ et $\frac{17\pi}{6}$ sont représentés par le même point sur le cercle trigonométrique. Pour cela on calcule $\frac{35\pi}{6} - \frac{17\pi}{6} = \frac{18\pi}{6} = 3\pi$.

3π ne peut pas s'écrire sous la forme $2k\pi$ avec k entier.

3π ne correspond pas à un nombre entier de tour complet du cercle trigonométrique.

Les 2 réels ne sont donc pas représentés par un même point.

Exercice 1 : Sur un cercle trigonométrique, placer les points A, B, C et D associés aux réels :

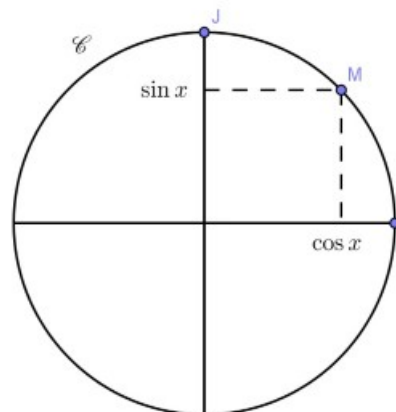
$$\pi \qquad -\frac{\pi}{2} \qquad \frac{\pi}{6} \qquad \frac{3\pi}{4} \qquad \frac{9\pi}{4}$$

II. Cosinus et Sinus d'un réel

1. Définitions

Définition : Soient $(O ; I, J)$ un repère orthonormé et C le cercle trigonométrique de centre O . Pour tout point M du cercle image du réel x , on appelle :

- **cosinus** de x , noté $\cos x$, l'abscisse du point M .
- **sinus** de x , noté $\sin x$, l'ordonnée du point M .
- Le point I , correspondant au réel 0 , a pour abscisse 1 et pour ordonnée 0 donc $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$
- Le point J , correspond au réel $\frac{\pi}{2}$, a pour abscisse 0 et pour ordonnée 1 donc $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin \frac{\pi}{2} = 1$



2. Propriétés

Propriété : Pour tout nombre réel x , on a :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$
- $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Remarque : pour tout x , tel que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, on retrouve les définitions des cosinus et sinus ainsi que les propriétés vues au collège, à l'aide du théorème de Pythagore.

Quelques valeurs particulières à connaître :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Propriété : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Démonstration

Soit M le point du cercle trigonométrique associé au réel $\frac{\pi}{3}$ et H son projeté orthogonal sur l'axe (OI) .

Les segments $[OI]$ et $[OM]$ sont deux rayons du cercle trigonométrique donc $OM=OI$ et le triangle OMI est par conséquent isocèle.

On a de plus $\widehat{IOM}=\frac{\pi}{3}$ donc le triangle isocèle OMI est équilatéral.

On déduit que la hauteur (OH) est aussi médiatrice de $[OI]$ donc $OH=\frac{1}{2}$.

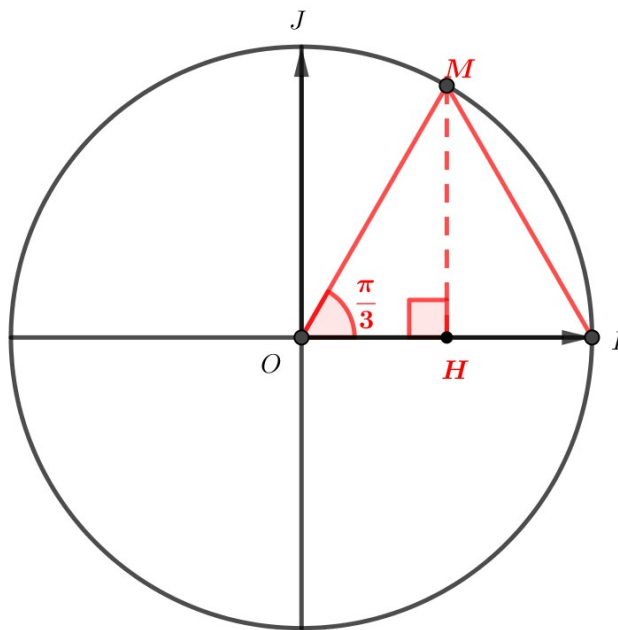
Or $0 \leq \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq 0$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=OH=\frac{1}{2}$

On a également $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x)+\sin^2(x)=1$ donc en particulier :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)=1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)=1 \Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Conclusion : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

#



Propriété : $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Démonstration

Soit M le point du cercle trigonométrique associé au réel $\frac{\pi}{4}$ et H son projeté orthogonal sur l'axe (OI) .

Le triangle OMH est rectangle en H et $\widehat{HOM}=\frac{\pi}{4}$ donc OMH est rectangle et isocèle en H .

Or $0 \leq \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$ donc $OH = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $HM = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

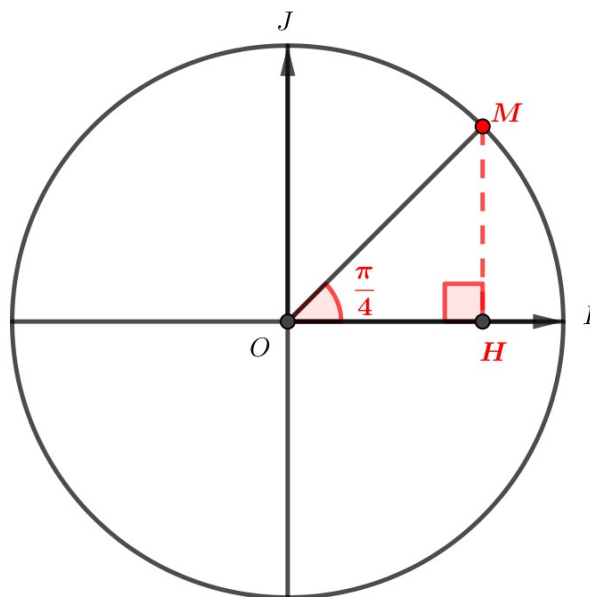
On a $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donc en particulier $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ ou } \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = OH \geq 0$ on déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Conclusion : $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

#



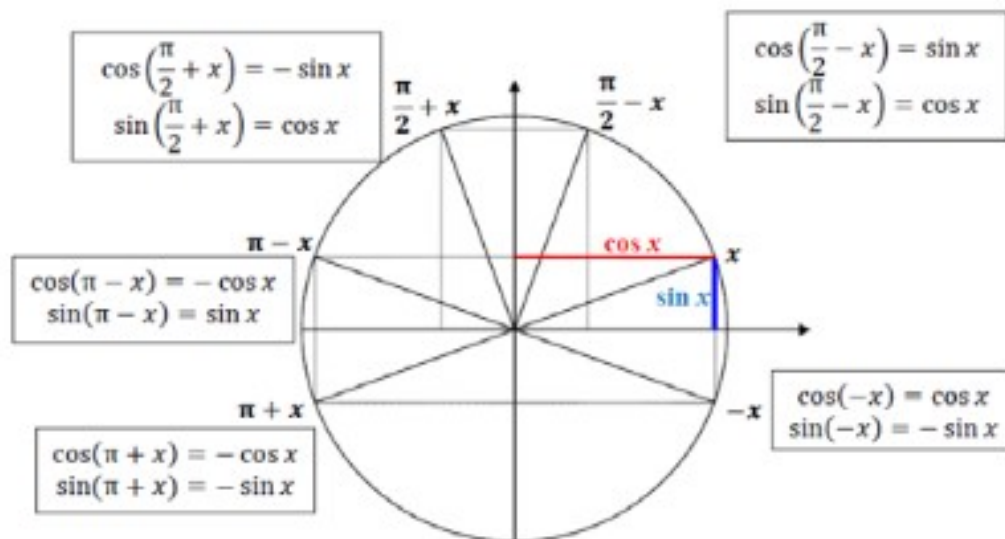
3. Cosinus et Sinus d'angles associés

Pour tout réel x , on a :

<ul style="list-style-type: none"> • $\cos(-x) = \cos(x)$ • $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ • $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ • $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ • $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $\sin(-x) = -\sin(x)$ • $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ • $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ • $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ • $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
--	---

Démonstration

- $M(a)$ et $M(-a)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc $\cos(-a) = \cos(a)$ et $\sin(-a) = -\sin(a)$
- $M(a)$ et $M(a + \pi)$ sont symétriques par rapport à l'origine donc $\cos(a + \pi) = -\cos(a)$ et $\sin(a + \pi) = -\sin(a)$
- $M(a)$ et $M(\pi - a)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées donc $\cos(\pi - a) = -\cos(a)$ et $\sin(\pi - a) = \sin(a)$
- $M(a)$ et $M(\pi/2 - a)$ sont symétriques par rapport à la 1ère bissectrice
- $M(\pi/2 + a)$ et $M(\pi/2 - a)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées (car $(\pi/2 + a)/2 + (\pi/2 - a)/2 = \pi/2$) donc $\cos(\pi/2 + a) = -\cos(\pi/2 - a) = -\sin(a)$ et $\sin(\pi/2 + a) = \sin(\pi/2 - a) = \cos(a)$



III. Équations trigonométriques

1. Équation $\cos x = \cos a$

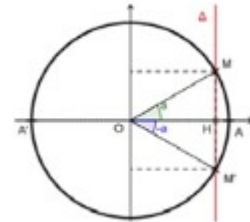
Propriété : L'équation $\cos x = \cos a$ d'inconnue x , a pour solutions les nombres

$$a+2k\pi \text{ et } -a+2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

Démonstration

- si $-1 < \cos a < 1$

On considère le point H de $[AA']$ d'abscisse $\cos a$. La perpendiculaire en H à la droite (AA') coupe le cercle trigonométrique en M et en M' associé aux réels a et $-a$. Les solutions sont donc les réels $a+2k\pi$ et $-a+2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$



- si $\cos a = 1$ alors H est en A ; les solutions sont donc les réels $0+2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
- si $\cos a = -1$ alors H est en A' ; les solutions sont donc les réels $\pi+2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ #

2. Équation $\sin x = \sin a$

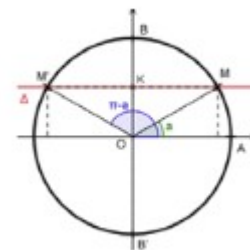
Propriété : L'équation $\sin x = \sin a$ d'inconnue x , a pour solutions les nombres

$$a+2k\pi \text{ et } \pi-a+2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

Démonstration

- si $-1 < \sin a < 1$

On considère le point K de $[BB']$ d'ordonnée $\sin a$. La perpendiculaire en K à la droite (BB') coupe le cercle trigonométrique en M et en M' associé aux réels a et $\pi-a$. Les solutions sont donc les réels $a+2k\pi$ et $\pi-a+2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$



- si $\sin a = 1$ alors K est en B ; les solutions sont donc les réels $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
- si $\sin a = -1$ alors K est en B' ; les solutions sont donc les réels $\frac{-\pi}{2}+2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

#

