Exercice 1

f est la fonction définie sur ℝ par $f(x)=\sin(2x)$.

1. Calculer $f(-x)$ et en déduire une propriété graphique de *Cf*.
2. Calculer $f(x+\pi)$ et en déduire une propriété graphique de *Cf*.
3. Donner une construction possible de C_f .

Correction

1. ℝ est symétrique par rapport à 0.
   De plus, $\forall x\in\mathbb{R}, f(-x)=\sin(-2x)=-\sin(2x)=-f(x)$
   car la fonction sinus est impaire ce qui implique $\sin(-2x)=-\sin(2x)$

   Conclusion : f est impaire

2. $\forall x\in\mathbb{R}, f(x+\pi)=\sin(2(x+\pi))=\sin(2x+2\pi)=\sin(2x)$
   car la fonction sinus est $2\pi-$ périodiques ce qui implique $\sin(2x+2\pi)=\sin(2x)$

   Conclusion : f est $\pi-$ périodique

3. On construit C_f sur $[0;\frac{\pi}{2}]$.
   f étant impaire, C_f est symétrique par rapport à O donc on peut construire C_f sur $[-\frac{\pi}{2};0]$. On a donc construit C_f sur $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.
   Comme f est $\pi-$ périodique , on peut construire C_f sur ℝ à partir de C_f sur $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ par translations de vecteurs $k\pi\vec{i}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{\cos(x)}{3+\sin^2(x)}$.

1. Montrer que f est paire et 2π - périodique. Interpréter graphiquement.
2. En déduire le plus petit intervalle I possible pour étudier f .

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x\cos(x)-\sin(x)$.

3. Montrer que est impaire. Interpréter graphiquement.
4. g est-elle 2π -périodique ? Justifier.

Correction

1. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.

   De plus, $\forall x\in\mathbb{R}, f(-x)=\dfrac{\cos(-x)}{3+\sin^2(-x)}=\dfrac{\cos(x)}{3+(-\sin(x))^2}=\dfrac{\cos(x)}{3+\sin^2(x)}$

   car la fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire ce qui implique $\cos(-x)=\cos(x)$ et $\sin(-x)=-\sin(x)$

   Conclusion : f est paire

2. $\forall x\in\mathbb{R}, f(x+2\pi)=\dfrac{\cos(x+2\pi)}{3+\sin^2(x+2\pi)}=\dfrac{\cos(x)}{3+\sin^2(x)}$

   car les fonctions cosinus et sinus sont $2\pi-$ périodiques ce qui implique que $\cos(x+2\pi)=\cos(x)$ et $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$

   Conclusion : f est $2\pi-$ périodique

3. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.

   De plus, $\forall x\in\mathbb{R}, g(-x)=(-x)\cos(-x)-\sin(-x)=-x\cos(x)-(-\sin(x))$

   car la fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire ce qui implique $\cos(-x)=\cos(x)$ et $\sin(-x)=-\sin(x)$

   On déduit que, $\forall x\in\mathbb{R}, g(-x)=-(x\cos(x)-\sin(x))=-g(x)$

   Conclusion : f est paire

4. $g(\pi)=\pi\cos(\pi)-\sin(\pi)=-\pi-0=-\pi$ et

   $g(\pi+2\pi)=g(3\pi)=3\pi\cos(3\pi)-\sin(3\pi)=-3\pi-0=-3\pi\neq-\pi$

   donc g n'est pas $2\pi-$ périodique

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=5\cos(2x+\frac{\pi}{3})$

On note C_f la représentation graphique de f .

1. La fonction f est-elle paire ? Impaire ? Ni l'une ni l'autre ? Justifier.
2. Montrer que la fonction est périodique de période π .
3. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	$\frac{-\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
$f(x)$							

4. Tracer C_f sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}]$.
5. Comment pouvez-vous construire C_f sur $[\frac{5\pi}{6};\frac{11\pi}{6}]$.

Correction

1. $f(\frac{\pi}{6})=5\cos(2\times\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3})=5\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3})=5\cos(\frac{2\pi}{3})=5\times\frac{-1}{2}=\frac{-5}{2}$
   $f(\frac{-\pi}{6})=5\cos(2\times\frac{-\pi}{6}+\frac{\pi}{3})=5\cos(\frac{-\pi}{3}+\frac{\pi}{3})=5\cos(0)=5\times1=5$
   donc f est ni paire ni impaire

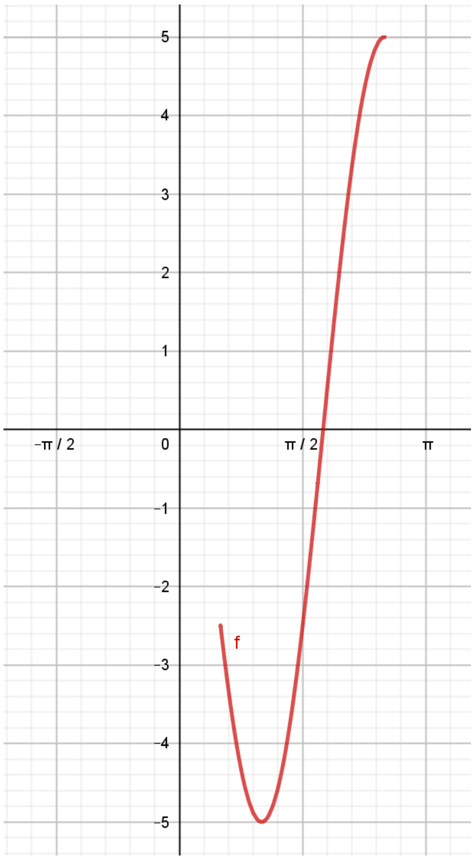
2. IR est symétrique par rapport à 0
   $f(x+\pi)=5\cos(2(x+\pi)+\frac{\pi}{3})=5\cos(2x+2\pi+\frac{\pi}{3})=5\cos(2x+\frac{\pi}{3})=f(x)$
   car la fonction cosinus est $2\pi-$ périodique

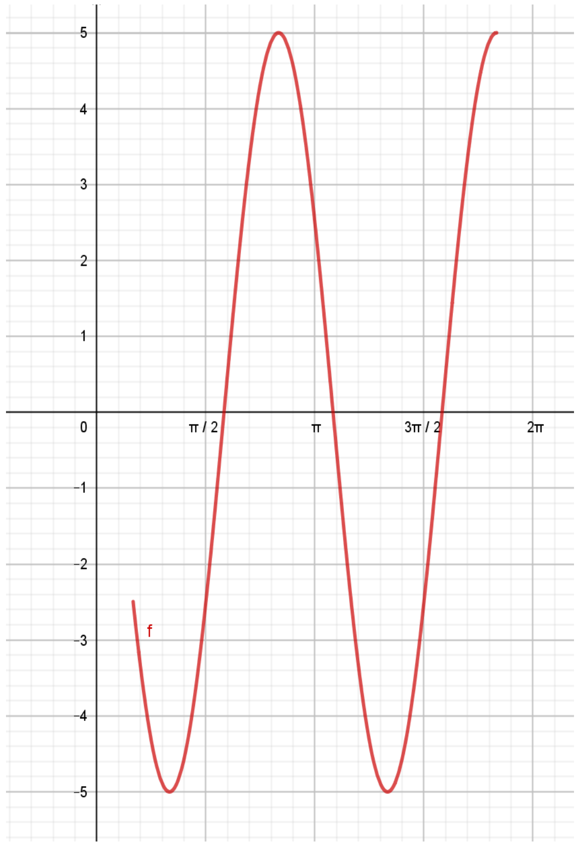
   Conclusion : f est $\pi-$ périodique

3.

x	$\frac{-\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
$f(x)$	5	$\frac{5}{2}$	$\frac{-5}{2}$	-5	$\frac{-5}{2}$	$\frac{5}{2}$	5

4. & **5.**





f étant $\pi-$périodique , on construit C_f sur $[\dfrac{5\pi}{6} ; \dfrac{11\pi}{6}]$ à partir de C_f sur $[-\dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{5\pi}{6}]$ par une translation de vecteur $\pi\vec{i}$.

Exercice 4

On admet la formule suivante, dite formule de linéarisation : $\cos^2(x)=\dfrac{1+\cos(2x)}{2}$

1. Exprimer $\sin^2(x)$ en fonction de $\cos(2x)$.
2. En déduire le cosinus et le sinus de $\dfrac{\pi}{8}$.

Correction

1. $\forall x\in\mathbb{R}, \cos^2(x)+\sin^2(x)=1$

   donc $\sin^2(x)=1-\cos^2(x)=1-\dfrac{1+\cos(2x)}{2}$

   donc $\sin^2(x)=\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

2. On déduit que $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{1+\cos\left(\dfrac{2\times\pi}{8}\right)}{2}=\dfrac{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{2}=\dfrac{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$

   Or $0<\dfrac{\pi}{8}<\dfrac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)>0$ donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

   De même, on montre que $0<\dfrac{\pi}{8}<\dfrac{\pi}{2}$ donc $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)>0$ donc $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$