Exercice 1

1. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2-\sin(x)$.
   (a) Soit $x\in\mathbb{R}$. Calculer $f(x+2\pi)$.
   (b) Que pouvez-vous déduire de la fonction *f* ?
   (c) Quelle propriété possède la courbe représentative de la fonction *f* ?

2. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-3+\cos(x)$.
   (a) Montrer que g est paire.
   (b) Que pouvez-vous en déduire pour la courbe représentative de la fonction *g* ?

Correction

1. (a) $\forall x\in\mathbb{R}, f(x+2\pi)=2-\sin(x+2\pi)=2-\sin(x)=f(x)$ car la fonction sinus est $2\pi-$périodique .
   (b) On déduit que f est $2\pi-$périodique .
   (c) On déduit que C_f se déduit sur $\mathbb{R}$ à partir de C_f sur $[-\pi;\pi]$ par translations de vecteurs $k\times 2\pi\vec{i}$.

2. (a) $\forall x\in\mathbb{R}, g(-x)=-3+\cos(-x)=-3+\cos(x)=g(x)$ car la fonction cosinus est paire.
   (b) On déduit que C_g est symétrique par rapport à O.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2\sin(x)$.
On note C_f est sa courbe représentative.

1. Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$. Que pouvez-vous déduire de la fonction *f* ?
2. Comment peut-on tracer la partie de C_f sur $[-\pi;0]$ à partir de la partie de C_f sur $[0;\pi]$.
3. Exprimer $f(x+2\pi)$ en fonction de $f(x)$. Que pouvez-vous déduire de la fonction *f* ?
4. Comment peut-on tracer la partie de C_f sur $[\pi;3\pi]$ à partir de la partie de C_f sur $[-\pi;\pi]$.

Correction

1. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
   $\forall x\in\mathbb{R}, f(-x)=2\sin(-x)=-2\sin(x)=-f(x)$ car la fonction sinus est impaire.
   Conclusion : f est impaire.

2. f est impaire donc on peut tracer C_f sur $[-\pi;0]$ à partir de la partie de C_f sur $[0;\pi]$ par la symétrie de centre O.

3. $\forall x\in\mathbb{R}, f(x+2\pi)=2\sin(x+2\pi)=2\sin(x)=f(x)$ car la fonction sinus est $2\pi-$périodique donc f est $2\pi-$périodique .

4. On construit C_f sur $[\pi;3\pi]$ à partir de de C_f sur $[-\pi;\pi]$ par la translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.

Exercice 3

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+\cos(x)$ est paire.
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x+\sin(x)$ est impaire.
3. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\frac{2}{3}\cos(7x+\frac{\pi}{4})$ est $\frac{2\pi}{7}$ périodique.

Correction

1. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
   $\forall x\in\mathbb{R}, f(-x)=(-x)^2+\cos(-x)=x^2+\cos(x)=f(x)$ car la fonction cosinus est paire.

   Conclusion : f est paire.

2. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
   $\forall x\in\mathbb{R}, g(-x)=(-x)+\sin(-x)=-x+(-\sin(x))$ car la fonction sinus est impaire donc
   $\forall x\in\mathbb{R}, g(-x)=-(x+\sin(x))=-g(x)$

   Conclusion : g est impaire.

3. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
   $\forall x\in\mathbb{R}, h(x+\frac{2\pi}{7})=\frac{2}{3}\cos\left(7(x+\frac{2\pi}{7})+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{3}\cos(7x+2\pi+\frac{\pi}{4})$
   $\forall x\in\mathbb{R}, h(x+\frac{2\pi}{7})=\frac{2}{3}\cos(7x+\frac{\pi}{4})$ car la fonction cosinus est $2\pi-\text{périodique}$ donc
   $\forall x\in\mathbb{R}, h(x+\frac{2\pi}{7})=h(x)$ donc h est $\frac{2\pi}{7}-\text{périodique}$

Exercice 4
Dans chaque cas, démontrer que la fonction f est T-périodique.

1. $f(x)=\cos(2\pi x)$ et $T=1$
2. $f(x)=\sin(3x)$ et $T=\frac{2\pi}{3}$
3. $f(x)=\frac{10}{7}\sin(\frac{5x-8}{3})$ et $T=\frac{6\pi}{5}$

Correction

1. $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x+1)=\cos(2\pi(x+1))=\cos(2\pi x+2\pi)=\cos(2\pi x)=f(x)$
car la fonction cosinus est $2\pi-$périodique donc f est 1-périodique.

2. $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x+\frac{2\pi}{3})=\sin\left(3(x+\frac{2\pi}{3})\right)=\sin(3x+2\pi)=\sin(3x)=f(x)$
car la fonction sinus est $2\pi-$périodique donc f est $\frac{2\pi}{3}-$périodique .

3.
$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x+\frac{6\pi}{5})=\frac{10}{7}\sin\left(\frac{5(x+\frac{6\pi}{5})-8}{3}\right)=\frac{10}{7}\sin\left(\frac{5x+6\pi-8}{3}\right)=\frac{10}{7}\sin\left(\frac{5x-8}{3}+\frac{6\pi}{3}\right)$$
$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x+\frac{6\pi}{5})=\frac{10}{7}\sin\left(\frac{5x-8}{3}+2\pi\right)=\frac{10}{7}\sin\left(\frac{5x-8}{3}\right)=f(x)$$
car la fonction sinus est $2\pi-$périodique donc f est $\frac{6\pi}{5}-$périodique .

Exercice 5

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3\cos(x)$.

1. Calculer $f(-x)$ et en déduire une propriété graphique de Cf.
2. Calculer $f(x+2\pi)$ et en déduire une propriété graphique de Cf.
3. Donner une construction possible de C_f .
4. A l'aide d'un tableau de valeurs, construisez C_f .

Correction

1. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
   $\forall x\in\mathbb{R}, f(-x)=3\cos(-x)=3\cos(x)=f(x)$ car la fonction cosinus est paire.

   Conclusion : f est paire.

2. $\forall x\in\mathbb{R}, f(x+2\pi)=3\cos(x+2\pi)=3\cos(x)=f(x)$ car la fonction cosinus est $2\pi-\text{périodique}$ donc f est $2\pi-\text{périodique}$.

3. f est paire donc on construit C_f sur $[-\pi;0]$ à partir de la partie de C_f sur $[0;\pi]$ par la symétrie d'axe (Oy). On a ainsi construit C_f sur $[-\pi;\pi]$.
   On déduit C_f sur $\mathbb{R}$ à partir de C_f sur $[-\pi;\pi]$ par translations de vecteurs $k\times 2\pi\vec{i}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

4. A l'aide d'un tableau de valeurs, construisez C_f .

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	3	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{2}$	0