

## La calculatrice est interdite

## Exercice 1

$$1. \quad e^{3x-5}=1 \Leftrightarrow e^{3x-5}=e^0 \Leftrightarrow 3x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3} \quad \text{Conclusion : } S=\left\{\frac{5}{3}\right\} .$$

$$2. \quad \text{Etude du signe de } (3-x) \\ 3-x=0 \Leftrightarrow x=3 \text{ et } 3-x>0 \Leftrightarrow x<3$$

$$\text{Etude du signe de } (1-e^{-2x}) \\ 1-e^{-2x}=0 \Leftrightarrow e^{-2x}=1 \Leftrightarrow e^{-2x}=e^0 \Leftrightarrow -2x=0 \Leftrightarrow x=0 \\ 1-e^{-2x}>0 \Leftrightarrow e^{-2x}>1 \Leftrightarrow e^{-2x}>e^0 \Leftrightarrow -2x>0 \Leftrightarrow x<0$$

On déduit le tableau de signes :

$x$	$-\infty$	$0$	$3$	$+\infty$
$(3-x)$		+	+	-
$(1-e^{-2x})$	-	+	0	+
$(3-x)(1-e^{-2x})$	-	0	+	-

Conclusion :  $S=[0;3]$  .

$$3. \quad \text{Résolution dans } \mathbb{R} \text{ de l'équation } 2e^{2x}-e^x=1 . \\ \text{On pose } X=e^x . \text{ On déduit } 2e^{2x}-e^x=1 \Leftrightarrow 2(e^x)^2-e^x=1 \Leftrightarrow 2X^2-X-1=0 . \\ X_1=1 \text{ est une racine évidente . La deuxième racine } X_2 \text{ vérifie } X_1 \times X_2 = \frac{c}{a} \text{ donc } X_2 = \frac{-1}{2} . \\ \text{Or, } X=e^x>0 \text{ donc seule la solution } X_1=1 \text{ peut convenir.} \\ \text{Or, } X=e^x=1 \Leftrightarrow x=0$$

Conclusion :  $S=\{0\}$

$$4. \quad \text{Résolution dans } \mathbb{R} \text{ de l'inéquation } 2e^{2x}+e^x-3 \leq 0 . \\ \text{On pose } X=e^x . \text{ On déduit } 2e^{2x}+e^x-3 \leq 0 \Leftrightarrow 2(e^x)^2+e^x-3 \leq 0 \Leftrightarrow 2X^2+X-3 \leq 0 . \\ \text{Recherche des racines de } 2X^2+X-3 \text{ dans } \mathbb{R} : \\ X_1=1 \text{ est une racine évidente . La deuxième racine } X_2 \text{ vérifie } X_1 \times X_2 = \frac{c}{a} \text{ donc } X_2 = \frac{-3}{2} . \\ \text{On déduit que } 2X^2+X-3 = 2(X-1)\left(X+\frac{3}{2}\right) \text{ donc } 2e^{2x}+e^x-3 = 2(e^x-1)\left(e^x+\frac{3}{2}\right) . \\ \text{Or, } \forall x \in \mathbb{R}, e^x>0 \text{ donc } \left(e^x+\frac{3}{2}\right)>0 . \text{ De plus, } 2>0 . \\ \text{On déduit que le signe de } 2(e^x-1)\left(e^x+\frac{3}{2}\right) \text{ dépend du signe de } (e^x-1) . \\ \text{Or, } e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=e^0 \Leftrightarrow x=0 \text{ et } e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>e^0 \Leftrightarrow x>0 . \\ \text{Conclusion : } S=]-\infty;0] .$$

## Exercice 2

1.  $B(7) = (5 \times 7 - 30)e^{-0,25 \times 7} = 5e^{-1,75}$ .
2.  $B(7) = (4 \times 7 - 30)e^{-0,25 \times 4} = -10e^{-1} < 0$  donc l'entreprise est déficitaire lorsqu'elle produit et vend 400 litres de soin antipelliculaire.
3.  $\forall y \in \mathbb{R}, e^y > 0$  donc  $\forall x \in [2; 20], e^{-0,25x} > 0$  donc le signe de  $B(x) = (5x - 30)e^{-0,25x}$  dépend uniquement du signe de  $(5x - 30)$ .  
 $B(x) \geq 0 \Leftrightarrow 5x - 30 \geq 0 \Leftrightarrow 5x \geq 30 \Leftrightarrow x \geq 6$ . Cela signifie que l'entreprise ne perd pas d'argent lorsqu'elle produit et vend au moins 600 litres de soin antipelliculaire.


4. (a)  $\forall x \in [2; 20], B(x) = (5x - 30)e^{-0,25x}$   
 $\forall x \in [2; 20], B'(x) = 5e^{-0,25x} + (-0,25e^{-0,25x}(5x - 30))$   
 $\forall x \in [2; 20], B'(x) = 5e^{-0,25x} - 1,25xe^{-0,25x} + 7,5e^{-0,25x}$   
 $\forall x \in [2; 20], B'(x) = -1,25xe^{-0,25x} + 12,5e^{-0,25x}$   
 $\forall x \in [2; 20], B'(x) = e^{-0,25x}(-1,25x + 12,5)$

(b)  $\forall y \in \mathbb{R}, e^y > 0$  donc  $\forall x \in [2; 20], e^{-0,25x} > 0$  donc le signe de  $B'(x) = e^{-0,25x}(-1,25x + 12,5)$  dépend uniquement du signe de  $(-1,25x + 12,5)$ .

$$B'(x) = 0 \Leftrightarrow (-1,25x + 12,5) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1,25}{-12,5} \Leftrightarrow x = 10$$

$$B'(x) > 0 \Leftrightarrow (-1,25x + 12,5) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{-1,25}{-12,5} \Leftrightarrow x < 10$$

d'où le tableau de variations de  $B$  sur  $[2; 20]$  :

$x$	2	10	20
$B'(x)$	+	0	-
$B$	$20e^{-2,5}$ 		

$$B(10) = (10 \times 7 - 30)e^{-0,25 \times 10} = 20e^{-2,5}$$

(C) On déduit que le bénéfice est maximal lorsque l'entreprise produit et vend 1000 soins antipelliculaires.

Exercice 3

1.  $u_1=130+52=182 \text{ €}$  et  $u_2=182+52=234 \text{ €}$  .
2. (a)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1}=u_n+52$  donc  $(u_n)$  est arithmétique de premier terme  $u_1=182$  et de raison  $r=52$  .  
 (b)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n=u_1+(n-1) \times r=130+(n-1) \times 52=78+52n$  .
3.  $S_2=u_1+u_2=130+182=312 \text{ €}$  et  $S_3=S_2+u_3=312+234=546 \text{ €}$  .
4. L'algorithme complété est :

```
def nombre_metre(S):
    C = 130
    n = 1
    while C < S :
        C = C + 52
        n = n + 1
    return n
```

5. (a) L'algorithme retourne la valeur  $n$  telle que  $C \geq S$  .  
 $C \geq S \Leftrightarrow S_n \geq S \Leftrightarrow 26n^2+104n \geq 116610 \Leftrightarrow 26n^2+104n-116610 \geq 0$
- (b)  $(E) \Leftrightarrow (E') : n^2+4n-4485 \geq 0$  avec  $\Delta=134^2 > 0$  donc la fonction polynôme du second degré  $g_n=n^2+4n-4485$  a deux racines réelles distinctes  $n_1=\frac{-4-134}{2}=-69 < 0$  et  $n_2=\frac{-4+134}{2}=65 > 0$  .  
 Or, le coefficient des  $n^2$  est  $a=1 > 0$  d'où le tableau de signes de  $g_n=n^2+4n-4485$  sur  $\mathbb{R}$  :

$n$	$-\infty$	$-69$	$65$	$+\infty$
$g_n=n^2+4n-4485$	+	0	-	+

La fonction Python retourne la plus petite valeur positive entière  $n$  telle que  $g_n=n^2+4n-4485 \geq 0$  donc l'algorithme retourne la valeur 65.