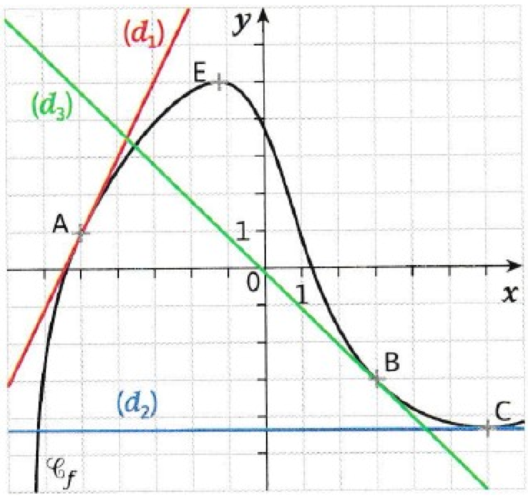
**Exercice 1**

On a tracé ci-contre la courbe *Cf* représentative d'une fonction *f*, ainsi que ses tangentes $(d_1),(d_2)$ et $(d_3)$.




1. Lire graphiquement les nombres dérivés $f'(-5)$, $f'(3)$ et $f'(6)$.
2. Le point E a pour abscisse -1,1. Lire graphiquement le nombre dérivé $f'(-1{,}1)$.

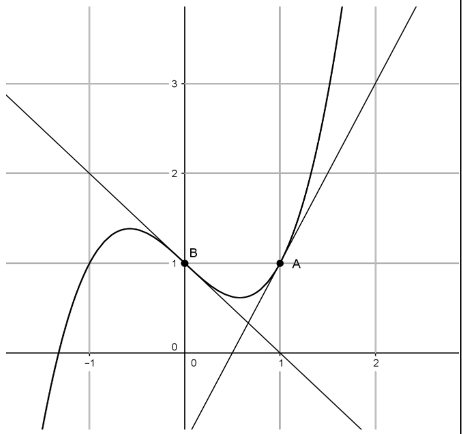
Correction

1. $f'(-5)=2$ , $f'(3)=-1$ et $f'(6)=0$ .
2. $f'(-1{,}1)=0$

**Exercice 2**

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ admet la représentation graphique *Cf* ci-dessous.
On a également représenté les tangentes à *Cf* au point A d'abscisse 1 et B d'abscisse 0.

1. Déterminer par lecture graphique les nombres dérivés de *f* en 1 et en 0.
2. On admet que la tangente à *Cf* au point d'abscisse -0,8 est horizontale. Déterminer $f'(-0{,}8)$ .

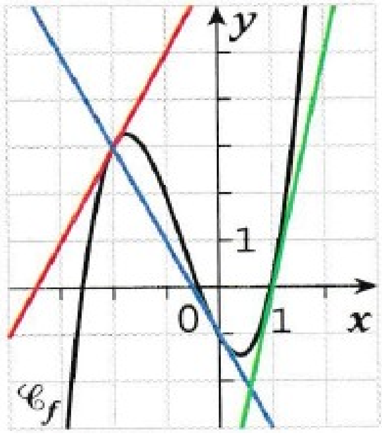



Correction

1. $f'(1)=2$ et $f'(0)=-1$ .
2. La tangente à *C* au point d'abscisse -0,8 est horizontale donc $f'(-0{,}8)=0$

**Exercice 3**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $Cf$ est donnée ci-contre. On a représenté les tangentes à $Cf$ au point d'abscisses respectives -2 ; 0 et 1.




1. Déterminer graphiquement les nombres dérivés $f'(-2)$ , $f'(0)$ et $f'(1)$ .
2. Déterminer par lecture graphique le nombre de valeurs de $a$ pour lesquelles $f'(a)=0$

Correction

1. $f'(-2)=2$ , $f'(0)=-2$ et $f'(1)=5$ .
2. Il y a deux valeurs de $a$ pour lesquelles $f'(a)=0$ , environ -1,8 et 0,5

**Exercice 4**

Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-x^2+2x$ .

1. Calculer $g(3)$ .
2. A l'aide de la calculatrice, faire un tableau de valeurs de $\frac{g(x)-g(3)}{x-3}$ pour $x$ variant de 2,95 à 3,05 avec un pas de 0,01.
3. Conjecturer alors $g'(3)$ .

Correction

1. $g(3)=-3^2+2\times3=-9+6=-3$ .
2. 

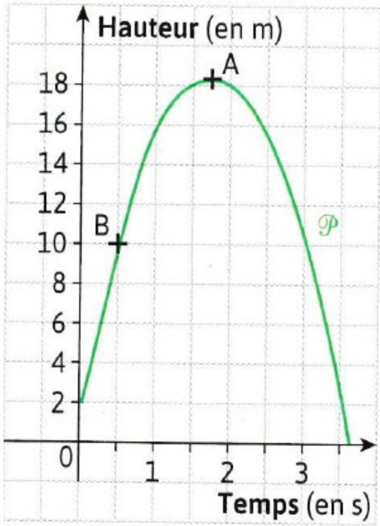
| $x$ | 2,95 | 2,96 | 2,97 | 2,98 | 2,99 | 3,01 | 3,02 | 3,03 | 3,04 | 3,05 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{g(x)-g(3)}{x-3}$ | -3,95 | -3,96 | -3,97 | -3,98 | -3,99 | -4,01 | -4,02 | -4,03 | -4,04 | -4,05 |

3. On peut constater que lorsque $x$ se rapproche de 3, $\frac{g(x)-g(3)}{x-3}$ se rapproche de -4 donc on peut conjecturer que $g'(3)=-4$ .

**Exercice 5**

La courbe ci-dessous représente la trajectoire d'un boulet de canon, la hauteur étant donnée en fonction du temps. On place sur la courbe les points A et B d'abscisses respectives 1,75 et 0,5.

1. Que peut-on dire de la tangente à la courbe au point A ? En déduire la vitesse instantanée du boulet de canon au bout de 1,75 s.
2. Antonio affirme que le vitesse instantanée du boulet au bout de 0,5 s est comprise entre 10 m/s et 15 m/s. Valider ou infirmer l'affirmation d'Antonio.

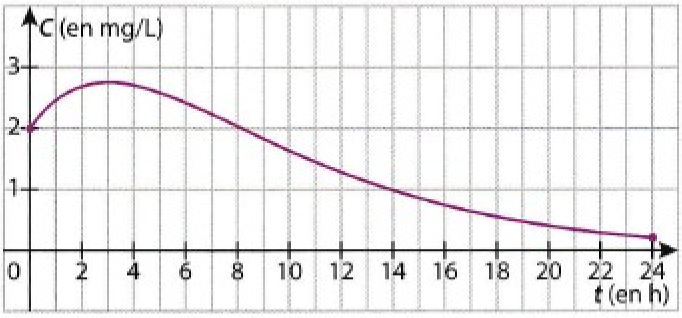



Correction

1. La tangente à la courbe au point A est horizontale. La vitesse instantanée du boulet correspond au nombre dérivée de la trajectoire et donc au coefficient directeur de la tangente. Au bout de 1,75 s, la vitesse instantanée est donc de 0 m/s.
2. Si l'on trace la tangente à la courbe au point B, on peut constater que son coefficient directeur est d'environ 8 ce qui implique que la vitesse du boulet est d'environ 8 m/s au bout de 0,5 s : l'affirmation d'Antonio est fausse.

**Exercice 6**

La concentration d'un médicament dans le sang (en mg/L) est donnée par une fonction *C* représentée en fonction du temps *t* (en h) par la courbe ci-dessous.



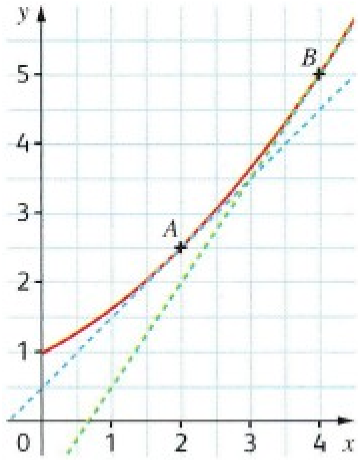

1. Quelle est la vitesse instantanée de l'évolution de la concentration au départ ?
2. Quelle est la vitesse instantanée de l'évolution de la concentration après 8h ?
3. Pour quelle valeur de *t* la vitesse d'évolution de la concentration est-elle nulle ?
4. Sur quel intervalle $C'(t)>0$ ?

Correction

1. Si l'on trace la tangente à la courbe au point de départ, on peut constater que son coefficient directeur est d'environ 0,5 ce qui implique que la vitesse instantanée de l'évolution de la concentration au départ est d'environ 0,5 mg/L/h.
2. De même, en traçant la tangente à la courbe au point d'abscisse 8, la vitesse instantanée de l'évolution de la concentration après 8h est d'environ -0,2 mg/L/h.
3. La vitesse d'évolution de la concentration est nulle lorsque la tangente est horizontale ce qui correspond à $t=3$ h.
4. $C'(t)>0$ sur l'intervalle $[0;3]$

**Exercice 7**

Une entreprise fabrique des pièces métalliques pour vélos. Le coût total de production, en dizaine de milliers d'euros, de *x* milliers de pièces est donné par une fonction *f* dont la courbe est tracée ci-contre. Deux tangentes sont représentées en pointillés au point A et B.




1. Déterminer le coût total de fabrication lorsque l'entreprise fabrique 2000 pièces, puis lorsqu'elle fabrique 4000 pièces.
2. Par lecture graphique, déterminer $f'(2)$ puis $f'(4)$ .
3. Interpréter les résultats obtenus dans le contexte de l'exercice.

Correction

1. Le coût total de fabrication lorsque l'entreprise fabrique 2000 pièces est de 25 000€.
   Le coût total de fabrication lorsque l'entreprise fabrique 4000 pièces est de 50 000€.
2. Sur le graphique, le nombre dérivé correspond au coefficient directeur de la tangente, on a donc : $f'(2)=1$ et $f'(4)=1{,}5$ .
3. Lorsque que la fonction représentée est le coût d'un produit, le nombre dérivé correspond au coût marginal : $f'(2)=1$ correspond donc au coût marginal de 2000 pièces.

**Exercice 8**

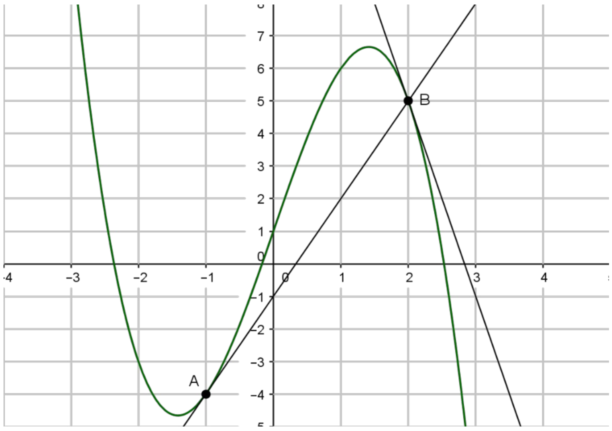
Soit *Cf* la courbe représentative d'une fonction *f* dérivable en -1. On sait que $f(-1)=2$ et $f'(-1)=-3$ . Écrire une équation de la tangente T à *Cf* au point d'abscisse -1.

Correction

- $f'(-1)=-3$ et $f(-1)=2$
- L'équation de la tangente au point d'abscisse -1 est de la forme
  $y=f'(-1)(x-(-1))+f(-1)$ soit $y=-3(x+1)+2=-3x-3+2$
- L'équation de la tangente au point d'abscisse -1 est $y=-3x-1$ .

**Exercice 9**

Voici la représentation graphique *Cf* d'une fonction *f*. A et B sont les points d'abscisses respectives -1 et 2. On a également représenté les tangentes à *Cf* au point A et B.




1. Déterminer par lecture graphique $f'(-1)$ , $f(-1)$ , $f'(2)$ et $f(2)$ .
2. En déduire une équation réduite de chacune de ces tangentes.

Correction

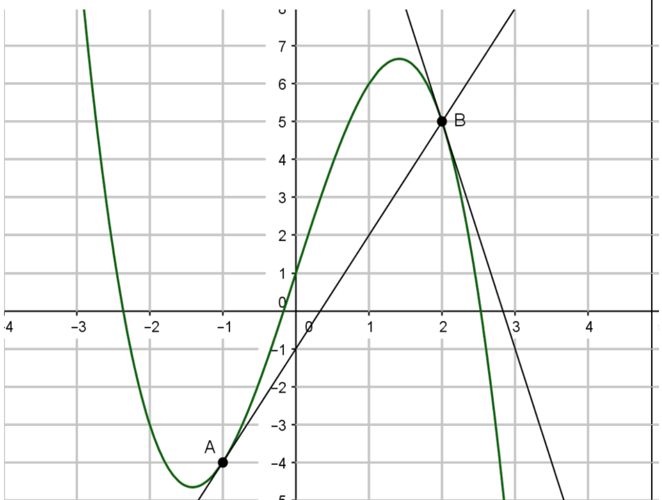
1. $f'(-1)=3$ , $f(-1)=-4$
   et $f'(2)=-6$ , $f(2)=5$

2. L'équation de la tangente en A est de la forme $y=f'(-1)(x-(-1))+f(-1)$
   soit $y=3(x+1)-4=3x+3-4$

   L'équation de la tangente en A est donc
   $y=3x-1$

   L'équation de la tangente en B est de la forme $y=f'(2)(x-2)+f(2)$ soit
   $y=-6(x-2)+5=-6x+12+5$

   L'équation de la tangente en B est donc $y=-6x+17$



**Exercice 10**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-x$ et $Cf$ sa courbe représentative.

1. On donne $f'(2)=3$ . Déterminer une équation de la tangente à la courbe en son point A d'abscisse 2.
2. Contrôler le résultat en utilisant la calculatrice.

Correction

1. $f'(2)=3$ . De plus $f(2)=2^2-2=4-2=2$ . L'équation de la tangente à la courbe en son point A d'abscisse 2 est de la forme $y=f'(2)(x-2)+f(2)$ soit
   $y=3(x-2)+2=3x-6+2=3x-4$
   Conclusion : L'équation de la tangente en A est donc $y=3x-4$
2. Voir la calculatrice.

**Exercice 11**

Soit $Cf$ la courbe représentative d'une fonction $f$ dérivable en 4. La droite T, d'équation. $y=-3x-2$ , est tangente à la courbe $Cf$ au point A d'abscisse 4. Déterminer $f'(4)$ et $f(4)$

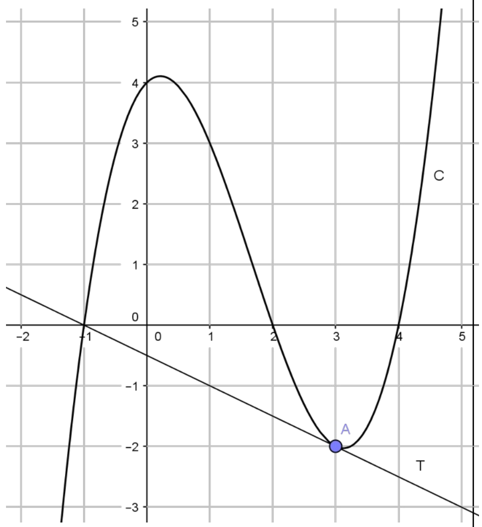
Correction

$f'(4)$ est le coefficient directeur de la tangente au point A d'abscisse 4 et l'équation de la tangente à la courbe au point A d'abscisse 4 est $y=-3x-2$ donc $f'(4)=-3$

$f(4)$ est l'ordonnée du point A. Le point A est d'abscisse 4 et il est sur la tangente donc $y_A=-3\times4-2=-14$ ainsi $f(4)=-14$

**Exercice 12**

Sur la graphique ci-contre, *C* est la courbe représentative d'une fonction *f* dérivable et la droite T est la tangente à *C* au point $A(3;-2)$ .




1. Par lecture graphique, déterminer la valeur de $f'(3)$ .
2. Déterminer une équation réduite de la tangente T.
3. Une équation de la tangente à *C* au point d'abscisse 1 est $y=-2,5x+5,5$ . En déduire $f'(1)$ .
4. On donne $f'(0)=1$ . Tracer sur le graphique la tangente T' à *C* au point d'abscisse 0.

Correction

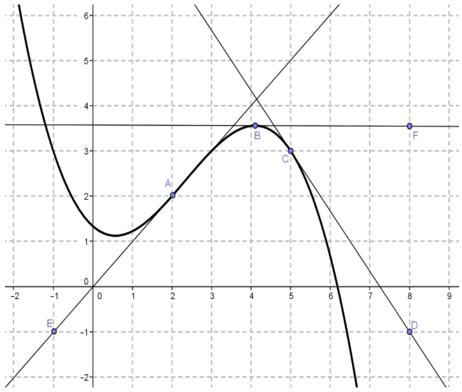
1. Graphiquement, $f'(3)$ représente le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 3 donc $f'(3)=\frac{-1}{2}$ .
2. L'équation de la tangente en A est de la forme $y=f'(3)(x-3)+f(3)$ soit $y=\frac{-1}{2}(x-3)-2=\frac{-1}{2}x+\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ .

   Conclusion: L'équation de la tangente en A est $y=\frac{-1}{2}x-\frac{1}{2}$ .

3. Une équation de la tangente à *C* au point d'abscisse 1 est $y=-2,5x+5,5$ , le coefficient directeur est -2,5 donc $f'(1)=-2,5$ .

4. On donne $f'(0)=1$ . La tangente T' à *C* au point d'abscisse 0 passe par le point d'abscisse 0 et a pour coefficient directeur 1.

**Exercice 13**



Sur le graphique ci-contre, $Cf$ est la courbe représentative d'une fonction $f$ dérivable et les tangentes $(AE),(BF)$ et $(CD)$ à $Cf$ aux points $A(2;2)$ , $B(4{,}1;3{,}6)$ et $C(5;3)$ . On donne $D(8;-1)$ et $E(-1;-1)$ .

1. Par lecture graphique, déterminer la valeur de $f'(2), f'(4{,}1)$ et $f'(5)$ .
2. Déterminer une équation réduite des tangentes $(AE)$ , $(BF)$ et $(CD)$ .
3. Une équation de la tangente à $Cf$ au point d'abscisse 0 est $y=-0{,}8x+1{,}3$ . En déduire $f'(0)$ .
4. On donne $f'(1)=0{,}5$ . Tracer sur le graphique la tangente T' à $Cf$ au point d'abscisse 1.

Correction

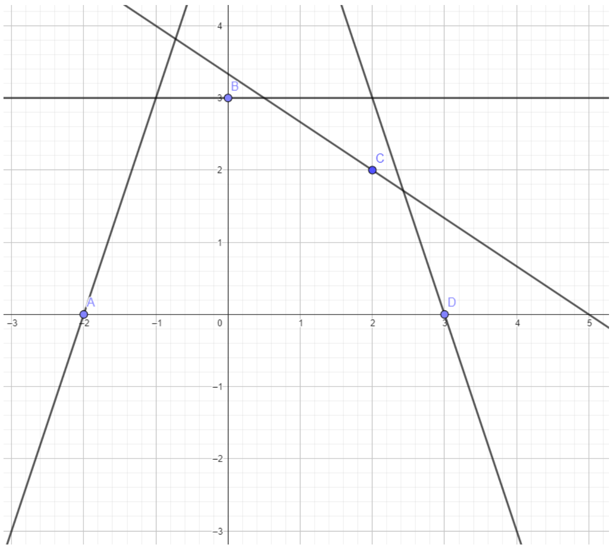
1. Graphiquement, $f'(2)$ représente le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 2 donc $f'(2)=1$ . De même $f'(4{,}1)=0$ et $f'(5)=\dfrac{-4}{3}$ .
2. L'équation de la tangente en A est de la forme $y=f'(2)(x-2)+f(2)$ soit $y=1(x-2)+2=x-2+2$ donc l'équation de la tangente en A est $y=x$
   L'équation de la tangente en B est de la forme $y=f'(4{,}1)(x-4{,}1)+f(4{,}1)$ soit $y=0(x-4{,}1)+3{,}6=3{,}6$ donc l'équation de la tangente en B est $y=3{,}6$ .
   L'équation de la tangente en C est de la forme $y=f'(5)(x-5)+f(5)$ soit $y=\dfrac{-4}{3}(x-5)+3=\dfrac{-4}{3}x+\dfrac{20}{3}+3$ donc la tangente en C est $y=\dfrac{-4}{3}x+\dfrac{29}{3}$ .
3. Une équation de la tangente à $Cf$ au point d'abscisse 0 est $y=-0{,}8x+1{,}3$ , le coefficient directeur est -0,8 donc $f'(0)=-0{,}8$ .
4. On donne $f'(1)=0{,}5$ . La tangente T' à $Cf$ au point d'abscisse 1 passe par le point d'abscisse 1 et a pour coefficient directeur 0,5.

**Exercice 14**

Tracer une représentation graphique d'une fonction $g$ vérifiant les données suivantes :

$g(-2)=0$ ; $g(0)=3$ ; $g(2)=2$ et $g(3)=0$ ainsi que $g'(-2)=3$ ; $g'(0)=0$ ; $g'(2)=\frac{-2}{3}$ et $g'(3)=-3$ .

Correction




**Exercice 15**

Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x)=7$
2. $g(x)=-3x+2$
3. $h(x)=5x^2+2x+9$
4. $a(x)=4x^3+6x^2-5x+3$

Correction

1. $f(x)=7$ : *f* est une fonction constante donc $f'(x)=0$ .
2. $g(x)=-3x+2$ : *g* est une fonction affine donc $g'(x)=-3$ .
3. $h(x)=5x^2+2x+9$ : *h* est la somme de fonctions dérivables donc $h'(x)=5\times 2x+2=10x+2$ .
4. $a(x)=4x^3+6x^2-5x+3$ : *a* est la somme de fonctions dérivables donc $a'(x)=4\times 3x^2+6\times 2x-5=12x^2+12x-5$

**Exercice 16**

Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x)=4-x$
2. $g(x)=-3x^2+5x+7$
3. $h(x)=-2x^3+6x^2-7x+\frac{1}{3}$
4. $a(x)=\frac{x^3}{4}-x^2+x+1$

Correction

1. $f(x)=4-x$ : *f* est une fonction affine donc $f'(x)=-1$ .
2. $g(x)=-3x^2+5x+7$ : *g* est la somme de fonctions dérivables donc $g'(x)=-3\times 2x+5=-6x+5$ .
3. $h(x)=-2x^3+6x^2-7x+\frac{1}{3}$ : *h* est la somme de fonctions dérivables donc $h'(x)=-2\times 3x^2+6\times 2x-7=-6x^2+12x-7$ .
4. $a(x)=\frac{x^3}{4}-x^2+x+1$ : *a* est la somme de fonctions dérivables donc $a'(x)=\frac{1}{4}\times 3x^2-2x+1=\frac{3}{4}x^2-2x+1$ .

**Exercice 17**

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$ , $f(x)=2x^3+6x^2$ . Montrer que $f'(x)=6x(x+2)$ .
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$ , $g(x)=3x^3-x$ . Montrer que $g'(x)=(3x-1)(3x+1)$ .
3. Pour tout $x\in\mathbb{R}$ , $h(x)=x^3+x^2-8x+2$ . Montrer que $h'(x)=(3x-4)(x+2)$ .
4. Pour tout $x\in\mathbb{R}$ , $a(x)=8x^3-21x^2-27x+54$ . Montrer que $a'(x)=(4x-9)(6x+3)$ .

Correction

1. $f(x)=2x^3+6x^2$ : *f* est la somme de fonctions dérivables donc $f'(x)=2\times 3x^2+6\times 2x=6x^2+12x=6x\times x+6x\times 2=6x(x+2)$ .
2. $g(x)=3x^3-x$ : *g* est la somme de fonctions dérivables donc $g'(x)=3\times 3x^2-1=9x^2-1=(3x)^2-1^2=(3x-1)(3x+1)$ .
3. $h(x)=x^3+x^2-8x+2$ : *h* est la somme de fonctions dérivables donc $h'(x)=3x^2+2x-8$ . Or $(3x-4)(x+2)=3x^2+6x-4x-8=3x^2+2x-8$ donc $h'(x)=(3x-4)(x+2)$ .
4. $a(x)=8x^3-21x^2-27x+54$ : *a* est la somme de fonctions dérivables donc $a'(x)=8\times 3x^2-21\times 2x-27=24x^2-42x-27$ .
   Or $(4x-9)(6x+3)=24x^2+12x-54x-27=24x^2-42x-27$ donc $a'(x)=(4x-9)(6x+3)$ .

**Exercice 18**

Pour chacune des fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction au point d'abscisse *a*.

1. $f(x)=3x-5$ et $a=2$.
2. $g(x)=x^2-3x+2$ et $a=3$.
3. $h(x)=4x^3-3x^2+2x+1$ et $a=-1$.

Correction

1. $f(x)=3x-5$ : *f* est une fonction affine donc $f'(x)=3$ ainsi $f'(2)=3$.
De plus $f(2)=3\times2-5=1$. L'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2 est de la forme $y=f'(2)(x-2)+f(2)$ soit $y=3(x-2)+1=3x-6+1$ donc l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2 est $y=3x-5$.
2. $g(x)=x^2-3x+2$ : *g* est la somme de fonctions dérivables donc $g'(x)=2x-3$ ainsi $g'(3)=2\times3-3=3$. De plus $g(3)=3^2-3\times3+2=2$. L'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 3 est de la forme $y=g'(3)(x-3)+g(3)$ soit $y=3(x-3)+2=3x-9+2$ donc l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 3 est $y=3x-7$.
3. $h(x)=4x^3-3x^2+2x+1$ : *h* est la somme de fonctions dérivables donc $h'(x)=4\times3x^2-3\times2x+2=12x^2-6x+2$ d'où $h'(-1)=12\times(-1)^2-6\times(-1)+2=20$.

   De plus $h(-1)=4\times(-1)^3-3\times(-1)^2+2\times(-1)+1=-8$. L'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse -1 est de la forme $y=h'(-1)(x-(-1))+h(-1)$ soit $y=20(x+1)-8=20x+20-8$ donc l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse -1 est $y=20x+12$.

**Exercice 19**

Soit *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-3x$.

1. Calculer $g'(x)$.
2. Montrer que les tangentes à la courbe de *g* aux points d'abscisses -2 et 2 sont parallèles.

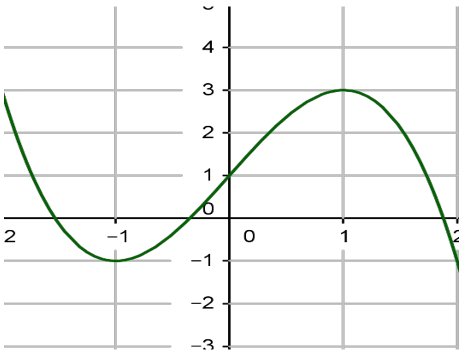
Correction

1. *g* est la somme de fonctions dérivables donc $g'(x)=3x^2-3$.
2. $g'(-2)=3\times(-2)^2-3=3\times4-3=9$ et $g'(2)=3\times2^2-3=3\times4-3=9$ : les deux tangentes ont le même coefficient directeur donc les tangentes à la courbe de *g* aux points d'abscisses -2 et 2 sont parallèles.

**Exercice 20**

Sur le graphe ci-dessous est représentée une fonction $f$ définie sur [-2;2].

1. Par lecture graphique, déterminer le sens de variation de $f$ sur [-2;2].
2. En déduire le tableau de signe de $f'$ sur [-2;2].




Correction

1. Tableau de variations de $f$ sur [-2;2].

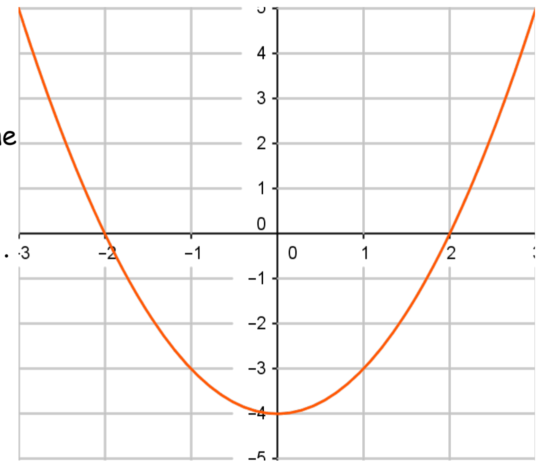
| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $3$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-1$ |

2. Tableau de signes de $f'$ sur [-2;2].

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**Exercice 21**

Soit $f$ une fonction dérivable sur [-3;3] .
On donne la courbe représentative de $f'$ ci-contre.




1. Par lecture graphique, déterminer le tableau de signe de $f'(x)$ sur [-3;3] . En déduire le tableau de variation de $f$ sur [-3;3] .
2. $a$ et $b$ sont deux réels de $[0;2]$ tels que $a<b$ . Comparer $f(a)$ et $f(b)$ .

Correction

1.

| $x$ | $-3$ | | $-2$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

2. Sur l'intervalle $[0;2]$ la fonction $f$ est décroissante donc si $a<b$ alors $f(a)>f(b)$ .

**Exercice 22**

Après avoir calculé la dérivée et étudié le signe de la dérivée, établir le tableau de variation des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$ .

1. $f(x)=3x^2+7x+10$ .
2. $g(x)=-x^2+3x+4$ .
3. $h(x)=4x-7$ .

Correction

1. $f'(x)=3\times 2x+7=6x+7$

   $6x+7=0 \Leftrightarrow 6x=-7 \Leftrightarrow x=-\dfrac{7}{6}$ et $6x+7\geq 0 \Leftrightarrow 6x\geqslant -7 \Leftrightarrow x\geqslant -\dfrac{7}{6}$ .

   De plus $f\left(\dfrac{-7}{6}\right)=\dfrac{71}{12}$ .

   On déduit le tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-7}{6}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | $\searrow$ | $\frac{71}{12}$ | $\nearrow$ | |

2. $g'(x)=-2x+3$

   $-2x+3=0 \Leftrightarrow -2x=-3 \Leftrightarrow x=\dfrac{-3}{-2}=\dfrac{3}{2}$

   $-2x+3\geq 0 \Leftrightarrow -2x\geqslant -3 \Leftrightarrow x\leqslant \dfrac{-3}{-2} \Leftrightarrow x\leqslant \dfrac{3}{2}$ .

   De plus $g(1,5)=6,25$ .

   On déduit le tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $1.5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g$ | | $\nearrow$ | $6.25$ | $\searrow$ | |

3. $h'(x)=4>0$ donc la fonction *h* est croissante sur $\mathbb{R}$ .

**Exercice 23**

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+6x^2-63x+10$ .

1. Calculer $f'(x)$ .
2. Montrer que $f'(x)=(3x-9)(x+7)$ .
3. Après avoir dresser le tableau de signe de $f'(x)$ , en déduire le tableau de variation de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$ .

Correction

1. $f'(x)=3x^2+6\times 2x-63=3x^2+12x-63$ .
2. $(3x-9)(x+7)=3x^2+21x-9x-63=3x^2+12x-63=f'(x)$ .
3. $3x-9=0\Leftrightarrow 3x=9\Leftrightarrow x=\frac{9}{3}\Leftrightarrow x=3$ et $3x-9\geqslant 0\Leftrightarrow 3x\geq 9\Leftrightarrow x\geqslant\frac{9}{3}\Leftrightarrow x\geqslant 3$

   $x+7=0\Leftrightarrow x=-7$ et $x+7\geq 0\Leftrightarrow x\geqslant 7$

   De plus $f(-7)=402$ et $f(3)=-98$ .

   On déduit le tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $-7$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x-9$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+7$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | $\nearrow$ | $402$ | $\searrow$ | $-98$ | $\nearrow$ | |

**Exercice 24**

Une étude de marché sur les panneaux solaires permet d'estimer que la production mensuelle d'un fabricant devra être comprise entre 1500 et 3000 panneaux solaires. L'évolution du bénéfice de ce fabricant (en centaines d'euros) généré par la vente de *x* centaines de panneaux solaires est modélisée par la fonction *f* définie sur [15;30] par $f(x)=-2x^2+90x-400$ .

1. Calculer $f'(x)$ .
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de *f* sur [15;30] .
3. Pour quelle production mensuelle le bénéfice est-il maximal ? Quelle est alors sa valeur ?

Correction

1. $f'(x)=-2\times 2x+90=-4x+90$ .
2. $-4x+90=0 \Leftrightarrow -4x=-90 \Leftrightarrow x=\dfrac{-90}{-4} \Leftrightarrow x=\dfrac{45}{2} \Leftrightarrow x=22{,}5$ .

   $-4x+90\geqslant 0 \Leftrightarrow -4x\geqslant -90 \Leftrightarrow x\leqslant \dfrac{-90}{-4} \Leftrightarrow x\leqslant \dfrac{45}{2} \Leftrightarrow x\leqslant 22{,}5$ .

   De plus $f(15)=500$ , $f(22{,}5)=612{,}5$ et $f(30)=500$ .

   On déduit le tableau de variations :

| $x$ | 15 | | 22.5 | | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f$ | 500 | $\nearrow$ | 612.5 | $\searrow$ | 500 |

3. D'après le tableau de variation, le bénéfice est maximal pour une production de 2250 panneaux solaires et le bénéfice maximal est 61 250€.

**Exercice 25**

Une entreprise fabrique des maques chirurgicaux. Le coût moyen de production d'un masque dépend de la quantité produite. Ce coût moyen est donné, en euros, par la fonction *C* définie sur [0;5] par $C(x)=0,5x^2-3x+4,52$ , où *x* est le nombre de masques fabriqués, en millions.

1. Lorsque l'entreprise produit 500 000 masques, quel est le coût moyen de fabrication d'un masque ?
2. Calculer $C'(x)$ .
3. Étudier le signe de $C'(x)$ et en déduire le tableau de variation de *C* sur [0;5] .
4. Pour quelle quantité de masques produits le coût moyen est-il minimal ? Quelle est alors le coût moyen minimal de fabrication d'un masque ?

Correction

1. $C(0,5)=3,145$ donc si l'entreprise produit 500 000 masques, le coût moyen de fabrication d'un masque est de 3,145€.
2. $C'(x)=0,5\times2x-3=x-3$ .
3. $x-3=0\Leftrightarrow x=3$ et $x-3\geqslant0\Leftrightarrow x\geqslant3$ .
   De plus $C(0)=4,52$ , $C(3)=0,02$ et $C(5)=2,02$ .
   On déduit le tableau de variations :

| $x$ | $0$ | | $3$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $C'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $C$ | $4.52$ | $\searrow$ | $0.02$ | $\nearrow$ | $2.02$ |

4. D'après le tableau de variation, le coût moyen est minimal pour une production de 3 millions de masques et le coût moyen minimal de fabrication d'un masque est de 0,02€

**Exercice 26**

Soit $f$ la fonction définie sur [0;10] par $f(x)=1000x^3-1500x^2-60000x+400000$ .

1. Calculer $f'(x)$ .
2. Montrer que $f'(x)=(30x-150)(100x+400)$ .
3. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur [0;10] et en déduire le tableau de variation de $f$ .
4. Le responsable d'un syndicat mixte d'adduction d'eau déclarait : « La fonction $f$ définie ci-dessus correspond au remplissage de notre retenue d'eau durant les onze derniers mois. De 400 000 $m^3$, nous avons vu le volume baisser et grâce à des pluies abondantes, le volume est remonté jusqu'à 650 000 $m^3$. Quel a été le volume d'eau minimum dans la retenue sur cette période de onze mois ?

Correction

1. $f'(x)=1000\times3x^2-1500\times2x-60000$ donc $f'(x)=3000x^2-3000x-60000$

2. $$(30x-150)(100x+400)=3000x^2+12000x-15000x-60000=3000x^2-3000x-60000$$
   donc $f'()=(30x-150)(100x+400)$
3. $$30x-150=0\Leftrightarrow 30x=150\Leftrightarrow x=\frac{150}{30}\Leftrightarrow x=5$$
   $$30x-150\geqslant0\Leftrightarrow 30x\geqslant150\Leftrightarrow x\geqslant\frac{150}{30}\Leftrightarrow x\geqslant5$$
   $$100x+400=0\Leftrightarrow 100x=-400\Leftrightarrow x=\frac{-400}{100}\Leftrightarrow x=-4$$
   $$100x+400\geqslant0\Leftrightarrow 100x\geqslant-400\Leftrightarrow x\geqslant\frac{-400}{100}\Leftrightarrow x\geqslant-4$$
   De plus $f(0)=400000$ , $f(5)=187500$ et $f(10)=650000$ .
   On déduit le tableau de variations :

| $x$ | 0 | | 5 | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $30x-150$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $100x+400$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f$ | 400000 | $\searrow$ | 187500 | $\nearrow$ | 650000 |

4. D'après le tableau de variation, le volume d'eau minimum dans la retenue est de 187 500 $m^3$.

**Exercice 27**
On veut réaliser un placard ayant la forme d'un parallélépipède droit. Pour $x \in [0\,;12]$, sa largeur et sa profondeur sont égal à $x$ dm. Sa hauteur est égal à $12-x$ dm.

1. Démontrer que l'expression du volume de ce placard en fonction de *x* est $V(x)=12x^2-x^3$.
2. Calculer la dérivée de *V*.
3. Factoriser $V'(x)$.
4. Étudier le signe de $V'(x)$ et en déduire le tableau de variation de *V* sur $[0\,;12]$.
5. Déterminer pour quelle valeur de *x* le volume de ce placard est maximal.

Correction

1. $V(x)=x \times x \times (12-x)=x^2(12-x)=12x^2-x^3$.
2. $V'(x)=12\times 2x-3x^2=24x-3x^2=-3x^2+24x$.
3. $V'(x)=-3x^2+24x=x(-3x+24)$.
4. Pour tout $x \in [0\,;12]$, $x \geq 0$, on a :
$$-3x+24=0 \Leftrightarrow -3x=-24 \Leftrightarrow x=\frac{-24}{-3} \Leftrightarrow x=8$$
$$-3x+24 \geqslant 0 \Leftrightarrow -3x \geqslant -24 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{-24}{-3} \Leftrightarrow x \leqslant 8$$
On déduit le tableau de variations :

| $x$ | $0$ | | $8$ | | $12$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $-3x+24$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $V'(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $V$ | $0$ | $\nearrow$ | $256$ | $\searrow$ | $0$ |

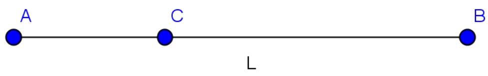
5. D'après le tableau de variation, le volume du placard est maximal pour $x=8$ et ce volume maximal est 256 dm$^3$.

**Exercice 28**

Dès le IIIème siècle avant J-C, Euclide s'est intéressé à la recherche d'un maximum. Son problème était le suivant : soit un segment [*AB*] ; où faut-il placer un point *C* sur ce segment pour que le produit $AC\times BC$ soit maximal ?

Résoudre ce problème.

Correction




Soit *L* la longueur du segment [*AB*] . On pose $AC=x$ donc $BC=L-x$ . On a $x\in[0;L]$ .

Par conséquent, $AC\times BC=x(L-x)=-x^2+Lx$ .

Soit *f* la fonction définie sur $[0;L]$ par $f(x)=-x^2+Lx$ .

On va étudier les variations de *f* sur $[0;L]$ .

*f* est la somme de fonctions dérivables donc $f'(x)=-2x+L$ .

$$f'(x)=0\Leftrightarrow -2x=-L\Leftrightarrow x=\frac{-L}{-2}\Leftrightarrow x=\frac{L}{2}$$

$$f'(x)\geqslant 0\Leftrightarrow -2x\geqslant -L\Leftrightarrow x\leqslant\frac{-L}{-2}\Leftrightarrow x\leqslant\frac{L}{2}$$

On déduit le tableau de signes et de variations :

| $x$ | $0$ | | $\frac{L}{2}$ | | $L$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{L^2}{4}$ | $\searrow$ | $0$ |

La fonction atteint son maximum pour $x=\frac{L}{2}$ donc le produit $AC\times BC$ est maximal quand *C* est au milieu de [*AB*] .

**Exercice 29**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x^2+4x+1$ .

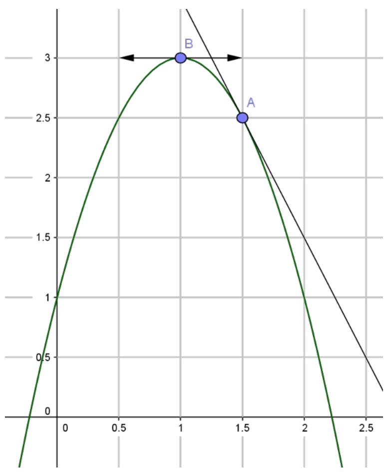
1. Montrer qu'elle admet en un point A un tangente de coefficient directeur -2.
   On indiquera les coordonnées de A et on donnera une équation de cette tangente.
2. Cette fonction admet-elle des tangentes horizontales ? Si oui, en quels points ?
3. Tracer la tangente en A et les éventuelles tangentes horizontales dans un repère puis la courbe représentative de $f$.

Correction

1. $f'(x)=-2\times 2x+4=-4x+4$ . Or, le coefficient directeur de la tangente est le nombre dérivé donc on cherche $x$ tel que $f'(x)=-2$ .
   $$f'(x)=-2\Leftrightarrow -4x+4=-2\Leftrightarrow -4x=-6\Leftrightarrow x=\frac{-6}{-4}\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=1{,}5$$
   $f(1{,}5)=2{,}5$ donc au point $A(1{,}5\,;2{,}5)$ la tangente a pour coefficient directeur -2 .
   L'équation de la tangente au point A est de la forme :
   $y=f'(1{,}5)(x-1{,}5)+f(1{,}5)$
   $y=-2(x-1{,}5)+2{,}5$
   $y=-2x+3+2{,}5$
   $y=-2x+5{,}5$
   Conclusion : L'équation de la tangente en A est $y=-2x+5{,}5$ .

2. Le coefficient directeur de la tangente est le nombre dérivé.
   Pour que la tangente soit horizontale il faut que son coefficient directeur soit égal à 0.
   On cherche $x$ tel que $f'(x)=0$ .
   $$f'(x)=0\Leftrightarrow -4x+4=0\Leftrightarrow -4x=-4\Leftrightarrow x=\frac{-4}{-4}\Leftrightarrow x=1$$
   De plus, $f(1)=3$ donc au point $B(1\,;3)$ la tangente est horizontale.

3.



**Exercice 30**

Soit *f* et *g* les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-4x$ et $g(x)=-2x^2+2x-3$ .

On note *C* et P leurs courbes représentatives respectives.

1. Montrer que la tangente T*f* à *C* au point d'abscisse 1 et la tangente T*g* à P au point d'abscisse 1 sont parallèles.
2. Les tangentes T*f* et T*g* sont-elles confondues ?
3. Déterminer l'équation réduite de T*f*.

Correction

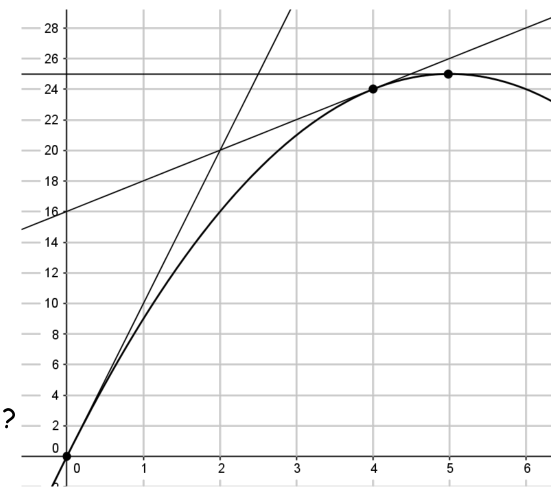
1. $f'(x)=2x-4$ donc $f'(1)=2\times1-4=-2$ .
   $g'(x)=-4x+2$ donc $g'(1)=-4\times1+2=-2$ .
   Conclusions : Les coefficients directeurs sont égaux donc les tangentes sont parallèles.
2. $f(1)=1-4=-3$ et $g(1)=-2+2-3=-3$ ,
   ces deux tangentes sont parallèles et ont un point commun donc sont confondues.
3. L'équation de T*f* est de la forme :
   $y=f'(1)(x-1)+f(1)$
   $y=-2(x-1)-3$
   $y=-2x+2-3$
   $y=-2x-1$
   Conclusion : L'équation de T*f* est $y=-2x-1$ .

**Exercice 31**

La position d'une bille en fonction du temps *t* est donnée par la courbe *C* ci-contre.

On a également tracé les tangentes à *C* aux points d'abscisses 0 ; 4 et 5.

1. Déterminer par lecture graphique la vitesse instantanée initiale.
2. Déterminer la vitesse instantanée aux instants : $t=4$ et $t=5$ .
3. Comment évolue la vitesse instantanée de la bille ?



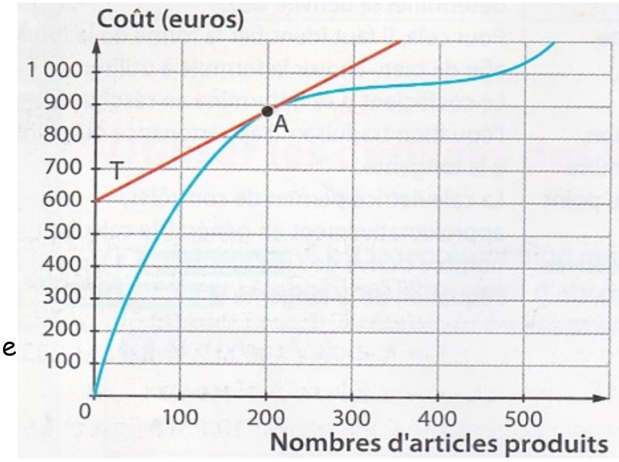

Correction

1. La vitesse instantanée initiale correspond au nombre dérivé en 0, c'est à dire, le coefficient directeur de la tangente en 0 qui correspond ici à 10 donc la vitesse initiale est 10.
2. De même la vitesse instantanée pour $t=4$ est 2 et la vitesse instantanée pour $t=5$ est 0.
3. On peut constater que plus la bille avance, plus la tangente est horizontale donc la vitesse instantanée de la bille diminue.

**Exercice 32**

Sur le graphique ci-contre est représenté le coût total $C$, exprimé en euros, en fonction du nombre d'articles produits et la tangente T à cette courbe au point d'abscisse 200.

Cette tangente passe par les points $A(200;880)$ et $B(0;600)$ .




1. Par lecture graphique, déterminer le coût fixe, c'est à dire le coût lorsqu' aucun article n'est produit.
2. Déterminer le coût total pour 200 articles produits, noté $C(200)$ .
3. On appelle coût marginal au rang 200 le coût engendré par la fabrication du 200ème article. Une valeur approchée de ce coût est le nombre dérivé de la fonction $C$ en 200. Déterminer une valeur approchée de ce coût marginal au rang 200.
4. Expliquer la démarche à réaliser graphiquement afin de déterminer le coût marginal le plus faible. Pour combien d'articles produits ce coût marginal le plus faible est-il obtenu ?

Correction

1. Le coût fixe est de 0€.
2. La courbe passe par le point $A(200;880)$ donc $C(200)=880$ .
3. Le nombre dérivé en 200 est le coefficient directeur de la tangente à la courbe en 200, on a donc $C'(200)=\frac{880-600}{200-0}=\frac{280}{200}=1,4$ donc le coût marginal est d'environ 1,4.
4. Comme la fonction est croissante, le nombre dérivé est positif et donc pour obtenir le plus faible, on cherche à se rapprocher de 0, il faut donc trouver l'endroit de la courbe où elle est la plus « plate » ! On peut estimer que c'est le cas pour 300 articles.

**Exercice 33**

Afin de modéliser la trajectoire d'un lancer de ballon de basket d'un joueur, on étudie la fonction *f* définie sur [0;6] par $f(x)=-0{,}4x^2+2{,}2x+2$ où *x* est la distance, en mètre, parcourue horizontalement par le ballon et $f(x)$ est la hauteur du ballon correspondante.

1. De quelle hauteur le ballon est-il lancé ?
2. Calculer $f'(x)$ .
3. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de *f* sur l'intervalle [0;6].
4. Quelle est la hauteur maximale atteinte par le ballon lors de ce lancer ?
5. Un panier de basket est situé à 3,05 mètres de haut et se trouve à 5 mètres du joueur. Le ballon peut-il rentrer dans le panier ?

Correction

1. $f(0)=2$ donc le ballon est lancé d'une hauteur de 2 m.
2. *f* est la somme de fonctions dérivables donc $f'(x)=-0{,}4\times 2x+2{,}2=-0{,}8x+2{,}2$ .
3. $-0{,}8x+2{,}2=0 \Leftrightarrow -0{,}8x=-2{,}2 \Leftrightarrow x=\dfrac{-2{,}2}{-0{,}8} \Leftrightarrow x=\dfrac{22}{8} \Leftrightarrow x=\dfrac{11}{4} \Leftrightarrow x=2{,}75$

   $-0{,}8x+2{,}2\geqslant 0 \Leftrightarrow -0{,}8x\geqslant -2{,}2 \Leftrightarrow x\leqslant\dfrac{-2{,}2}{-0{,}8} \Leftrightarrow x\leqslant\dfrac{22}{8} \Leftrightarrow x\leqslant\dfrac{11}{4} \Leftrightarrow x\leqslant 2{,}75$

   De plus $f(2{,}75)=5{,}025$ et $f(6)=0{,}8$ .

   On déduit le tableau de variations :

| $x$ | $0$ | | $2.75$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $2$ | $\nearrow$ | $5.025$ | $\searrow$ | $0.8$ |

4. D'après le tableau de variation la hauteur maximale atteinte par le ballon est de 5,025 m.
5. $f(5)=3<3{,}05$ donc le ballon ne va pas rentrer dans le panier

**Exercice 34**

Lors du transport de l'électricité depuis un générateur vers un récepteur, les câbles électriques fonctionnent comme des résistances et dissipent par effet Joule une partie de l'énergie destinée au récepteur. La puissance perdue par effet Joule dépend de l'intensité du courant et de la résistance du câble. Dans un réseau électrique donné dont l'intensité peut varier entre 1 A et 5 A, on a obtenu la formule suivante, reliant la puissance *P* dissipée, en watts, et l'intensité *I* du courant en ampères :
$P(I)=0{,}3\,I^2-2{,}4\,I+9$ . Déterminer la valeur de l'intensité du courant pour laquelle la puissance dissipée est minimale.

Correction

Pour $I\in[1\,;5]$ , $P(I)=0{,}3\,I^2-2{,}4\,I+9$ .
Il faut étudier les variations de la fonction *P*.
$P'(I)=0{,}3\times 2\,I-2{,}4=0{,}6\,I-2{,}4$ .

$$0{,}6\,I-2{,}4=0\Leftrightarrow 0{,}6\,I=2{,}4\Leftrightarrow I=\frac{2{,}4}{6}\Leftrightarrow I=0{,}4$$

$$0{,}6\,I-2{,}4\geqslant 0\Leftrightarrow 0{,}6\,I\geqslant 2{,}4\Leftrightarrow I\geqslant\frac{2{,}4}{6}\Leftrightarrow I\geqslant 0{,}4$$

De plus $P(1)=6{,}9$ , $P(4)=4{,}2$ et $P(5)=4{,}5$ .
On déduit le tableau de variations :

| $x$ | $1$ | | $4$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P'(I)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $P$ | $6.9$ | $\searrow$ | $4.2$ | $\nearrow$ | $4.5$ |

D'après le tableau de variations, la puissance dissipée est minimale pour $I=4\,A$ .

**Exercice 35**
Dans le Périgord, un producteur de truffes noires cultive, ramasse et conditionne de 0 à 45 kilogrammes de ce produit par semaine durant la période de production de la truffe.
On désigne par *x* le nombre de kilogrammes de truffes traités chaque semaine et par $f(x)$ le coût total en euros pour la production de *x* kg de truffes. Pour ce producteur, $f(x)=x^3-60x^2+975x$ .
De plus, chaque kilogramme de truffes conditionné est vendu 450 euros.

1. Déterminer le coût total de production de 10 kg de truffes.
2. On note $R(x)$ la recette correspondant à la vente de *x* kg de truffes. Exprimer $R(x)$ en fonction de *x*.
3. Démontrer que le bénéfice $B(x)$ réalisé par le fabricant pour *x* kg de truffes conditionnés et vendus s'écrit $B(x)=-x^3+60x^2-525x$ .
4. Calculer $B'(x)$ et montrer que $B'(x)=(x-35)(-3x+15)$ .
5. Étudier le signe de $B'(x)$ et en déduire le tableau de variation de *B* sur $[0;45]$ .
6. Pour quelle quantité de truffes le bénéfice du fabricant est-il maximal ? Quel est alors ce bénéfice maximal ?

Correction

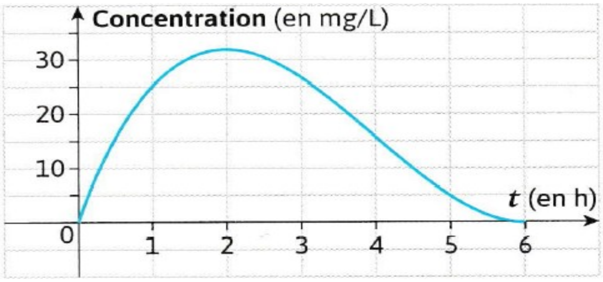
1. $f(10)=4750$ donc le coût total de production de 10 kg de truffes est de 4750 €.
2. Chaque kilogramme de truffes est vendu 450€ donc $R(x)=450x$ .
3. $B(x)=R(x)-f(x)=450x-(x^3-60x^2+975x)=450x-x^3+60x^2-975x$
   donc $B(x)=-x^3+60x^2-525x$
4. $B'(x)=-3x^2+60\times 2x-525=-3x^2+120x-525$ . Or,
   $(x-35)(-3x+15)=-3x^2+15x+105x-525=-3x^2+120x-525=B'(x)$
   Conclusion : $B'(x)=(x-35)(-3x+15)$ .
5. $x-35=0 \Leftrightarrow x=35$ et $x-35\geqslant 0 \Leftrightarrow x\geqslant 35$
   $$-3x+15=0 \Leftrightarrow -3x=-15 \Leftrightarrow x=\frac{-15}{-3} \Leftrightarrow x=5$$
   $$-3x+15\geqslant 0 \Leftrightarrow -3x\geqslant -15 \Leftrightarrow x\leqslant \frac{-15}{-3} \Leftrightarrow x\leqslant 5$$
   De plus $B(0)=0$ , $B(5)=-1250$ , $B(35)=12250$ et $B(45)=6750$ .
   On en déduit le tableau de variations :

| $x$ | 0 | | 5 | | 35 | | 45 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-35$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $-3x+15$ | | $+$ | 0 | $-$ | | $-$ | |
| $B'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $B$ | 0 | ↘ | $-1250$ | ↗ | 12250 | ↘ | 6750 |

6. D'après le tableau de variations, le bénéfice est maximal pour 35 kg de truffes et vaut azlors vaut 12250€.

**Exercice 36**

Un médicament est administré à un patient. L'évolution de la concentration du produit actif dans le sang (en mg/L) en fonction du temps *t* (en h) est modélisée par la fonction *f* définie sur $[0;6]$ par $f(t)=t^3-12t^2+36t$ et représentée par la courbe ci-dessous.




1. Lire graphiquement la valeur maximale de la concentration du produit actif dans le sang.
2. Calculer $f'(t)$ et montrer que $f'(t)=(3t-6)(t-6)$ .
3. En déduire le tableau de variation de la fonction *f* sur $[0;6]$ .
4. Confirmer ou infirmer le résultat de la question 1.
5. La notice du médicament indique : « au bout de 5 heures, la concentration dans le sang du produit actif est inférieure à 20% de sa valeur maximale ». Est-ce vrai ?

Correction

1. Graphiquement, la concentration maximale de produit actif dans le sang vaut 32 mg/L.
2. $f'(t)=3t^2-12\times 2t+36=3t^2-24t+36$ . De plus, $(3t-6)(t-6)=3t^2-18t-6t+36=3t^2-24t+36=f'(t)$
3. $3t-6=0 \Leftrightarrow 3t=6 \Leftrightarrow t=\frac{6}{3} \Leftrightarrow t=2$ et $3t-6\geqslant 0 \Leftrightarrow 3t\geqslant 6 \Leftrightarrow t\geqslant \frac{6}{3} \Leftrightarrow t\geqslant 2$

   De plus $f(0)=0$ , $f(2)=32$ et $f(6)=0$ .

   On déduit le tableau de variations :

| $t$ | $0$ | | $2$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $3t-6$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $t-6$ | | $-$ | | $-$ | $0$ |
| $f'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $32$ | $\searrow$ | $0$ |

4. D'après le tableau de variation, le résultat de la question 1. est vrai;
5. $f(5)=5$ , $32\times\frac{20}{100}=6{,}4$ et $5<6{,}4$ donc la notice du médicament dit vrai.

**Exercice 37**
Une entreprise vend un tissu en coton de forme rectangulaire de 1 mètre de large. On note *x* sa longueur exprimée en kilomètres, *x* étant un réel compris entre 0 et 10. Le coût total de production en euros de ce tissu est donné, en fonction de *x*, par $C(x)=15x^3-120x^2+350x+1000$ .
Le cours du marché offre un prix de 530€ le kilomètre de tissu fabriqué par l'entreprise.
Pour tout réel *x* de l'intervalle $[0;10]$ , on note $R(x)$ la recette et $B(x)$ le bénéfice générés par la production et la vente de *x* kilomètres de tissu par l'entreprise.

1. Déterminer le montant des coûts fixes.
2. Calculer le coût de production, la recette et le bénéfice générés par la production et la vente de 4 kilomètres de tissus.
3. Exprimer $R(x)$ en fonction de *x*.
4. Montrer que, pour tout $x\in[0;10]$ , on a $B(x)=-15x^3+120x^2+180x-1000$ .
5. Calculer $B'(x)$ et montrer que $B'(x)=(-45x-30)(x-6)$ .
6. Étudier le signe de $B'(x)$ et en déduire le tableau de variation de *B* sur $[0;10]$ .
7. Pour quelle longueur de tissu produit et vendu l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice maximal ? Donner alors la valeur de ce bénéfice maximal.

Correction

1. $C(0)=1000$ : Les coûts fixes font 1000€;
2. $C(4)=1440\,€$ , $R(4)=530\times4=2120\,€$ donc $B(4)=2120-1440=680\,€$ ,
3. Chaque kilomètre est vendu 530€ donc $R(x)=530x$ .
4. $B(x)=R(x)-C(x)=530x-(15x^3-120x^2+350x+1000)$ donc
   $B(x)=530x-15x^3+120x^2-350x-1000=-15x^3+120x^2+180x-1000$
5. $B'(x)=-15\times3x^2+120\times2x+180=-45x^2+240x+180$ . De plus?,
   $(-45x-30)(x-6)=-45x^2+270x-30x+180=-45x^2+240x+180=B'(x)$ .
6. $-45x-30=0\Leftrightarrow-45x=30\Leftrightarrow x=\dfrac{30}{-45}\Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{3}$
   $-45x-30\geqslant0\Leftrightarrow-45x\geqslant30\Leftrightarrow x\leqslant\dfrac{30}{-45}\Leftrightarrow x\leqslant-\dfrac{2}{3}$
   $x-6=0\Leftrightarrow x=6$ et $x-6\geqslant0\Leftrightarrow x\geqslant6$
   De plus $B(0)=-1000$ , $B(6)=1160$ et $B(10)=-2200$ .
   On déduit le tableau de variations :

| $x$ | $0$ | | $6$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-45x-30$ | | $-$ | | $-$ | |
| $x-6$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $B'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $B$ | $-1000$ | $\nearrow$ | $1160$ | $\searrow$ | $-2200$ |

7. D'après le tableau de variation, il faut produire et vendre 6 kilomètres de tissu pour réaliser un bénéfice maximal et le bénéfice maximal est de 1160€.