Exercice 1

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$, unité graphique : 2 cm.
On note f l'application du plan P privé du point O dans P qui, à tout point M d'affixe z non nulle, associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{1}{\overline{z}}$ où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.
On a donc aussi $z' = \dfrac{z}{|z|^2}$ où $|z|$ désigne le module de z.

1. Montrer que O, M et M' sont alignés.

2. Déterminer l'ensemble Γ des points invariants par f.
Vérifier que l'ensemble Γ contient les points A et B d'affixes respectives -1 et i.

3. Soient $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [AB], E le milieu de [AB] et $\text{E}' = f(\text{E})$.
Déterminer une équation de $\mathscr{C}$.
Montrer que E' appartient à $\mathscr{C}$.

4. Le point M d'affixe z étant un point quelconque de la droite (AB), on se propose de construire son image M' d'affixe z' par l'application f.

a. Déterminer une équation de la droite (AB).
On pose $k = \text{O}M^2$, $z = x + \text{i}y$ et $z' = x' + \text{i}y'$ avec x, y, x', y' réels.
Exprimer k en fonction de x.
Montrer que M' appartient à $\mathscr{C}$ (on pourra exprimer x' et y' en fonction de x et k).

b. Déduire des questions précédentes une construction géométrique du point M' connaissant le point M.

Exercice 2

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.
Le plan est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormal direct.
On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) :

$$z^3-8z^2+24z-32=0.$$

1. **a.** Vérifier que 4 est solution de l'équation (E).

   b. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout z complexe :

   $$z^3-8z^2+24z-32=(z-4)\left(az^2+bz+c\right).$$

   c. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ et exprimer les solutions sous forme trigonométrique.

2. p étant un réel strictement positif, on note $\left(\mathrm{E}_p\right)$ l'équation suivante :

   $$z(z-4)\left(z^2-4z+4+p^2\right)=0.$$

   a. Montrer que les points du plan dont les affixes sont solutions de $\left(\mathrm{E}_p\right)$ sont les sommets d'un losange dont l'aire vaut $4p$ unités d'aire.

   b. Dessiner ce losange dans le cas où $p=2$.