Exercice 1

1. $z_{\overrightarrow{OM'}}=z_{M'}=\frac{z}{|z|^2}$ et $z_{\overrightarrow{OM}}=z$ donc $z_{\overrightarrow{OM'}}=\frac{1}{|z|^2}\times z_{\overrightarrow{OM}}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires donc les points O, M et M' sont alignés.

   Conclusion : Les points O, M et M' sont alignés.

2. $M\in\Gamma\Leftrightarrow z'=z\Leftrightarrow\frac{z}{|z|^2}=z\Leftrightarrow|z|^2=1\Leftrightarrow|z|=1\Leftrightarrow M\in C(O;1)$

   Conclusion : $\Gamma=C(O;1)$.

   De plus, $|-1|=1$ et $|i|=1$ donc $A(1)\in\Gamma$ et $B(i)\in\Gamma$.

3. $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=i-1=-1+i$ donc $AB=|z_{\overrightarrow{AB}}|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$ donc $r=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

   Le centre du cercle *C* est $E(\frac{-1+i}{2})$ donc $E(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$.

   On déduit qu'une équation de *C* est donnée $\left|z-(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2})\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

   Si on pose $z=x+iy$, on déduit une équation cartésienne de *C* dans $(O;\vec{u},\vec{v})$:

   $$(x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2\Leftrightarrow x^2+y^2+x-y+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^2+y^2+x-y=0$$

   $$E'=f(E)\Leftrightarrow z_{E'}=\frac{1}{(-\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}\times(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)=\frac{1}{\frac{1}{2}}\times(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)=2\times(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)=-1+i$$ donc $E'(-1;1)$.

   Or, $(-1)^2+1^2+(-1)-1=1+1-1-1=0$ donc $E'(-1;1)$ appartient au cercle *C*.

4. Soit $M(z)\in(AB)$ avec $A(-1;0)$ et $B(0;1)$.

   (a) $M\in(AB)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires
   $M\in(AB)\Leftrightarrow det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB})=0$
   $M\in(AB)\Leftrightarrow(x+1)\times1-y\times1=0$
   $M\in(AB)\Leftrightarrow y=x+1$

   Conclusion : $(AB): y=x+1$.

   On déduit que $M(x+iy)\Leftrightarrow M(x+i(x+1))\Leftrightarrow M(x;x+1)$ donc $k=OM^2=x^2+(x+1)^2=2x^2+2x+1$.

   Conclusion : $k=2x^2+2x+1$.

   $$M'=f(M)\Leftrightarrow z'=\frac{1}{|z|^2}\times z=\frac{1}{k}\times z=\frac{1}{k}\times(x+i(x+1))$$
   $$M'=f(M)\Leftrightarrow x'=\frac{x}{k}\text{ et }y'=\frac{x+1}{k}$$

Or, $(\frac{x}{k})^2+(\frac{x+1}{k})^2+(\frac{x}{k})-(\frac{x+1}{k})=\frac{x^2}{k^2}+\frac{x^2+2x+1}{k^2}+\frac{x}{k}-\frac{x}{k}-\frac{1}{k}=\frac{x^2}{k^2}+\frac{x^2+2x+1}{k^2}-\frac{1}{k}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k}=0$

donc $M'(z')\in C$.

(b) Soit $M\in(AB)$.

D'après le 1., on sait que O, M et M' sont alignés et d'après le 4.(a), on sait que M' appartient à *C*.

Conclusion : M étant donné sur (AB), on trace la droite (OM) et le cercle *C*.
M' est alors le point d'intersection de *C* avec la droite (OM).

Exercice 2

$(E): z^3-8\times z^2+24\times z-32=0$

1. (a) $4^3-8\times 4^2+24\times 4-32=64-128+96-32=0$ donc 4 est une solution de (E).

(b) $z^3-8\times z^2+24\times z-32=(z-4)(az^2+bz+c)$
$\Leftrightarrow z^3-8\times z^2+24\times z-32=az^3+bz^2+cz-4az^2-4bz-4c$
$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b-4a=-8 \\ c-4b=24 \\ -4c=-32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ b=-4 \\ c=8 \end{cases}$

Conclusion : $\forall z\in\mathbb{C}, z^3-8\times z^2+24\times z-32=(z-4)(z^2-4z+8)$.

(c) $z^3-8\times z^2+24\times z-32=0\Leftrightarrow(z-4)(z^2-4z+8)=0\Leftrightarrow z-4=0 \text{ ou } z^2-4z+8=0$
$z^3-8\times z^2+24\times z-32=0\Leftrightarrow(z-4)(z^2-4z+8)=0\Leftrightarrow z=4 \text{ ou } z^2-4z+8=0$

Résolution de $z^2-4z+8=0 \text{ dans } \mathbb{C}$.

$\Delta=(-4)^2-4\times1\times8=16-32=-16<0$ donc l'équation $z^2-4z+8=0$ a deux solutions complexes

conjuguées dans $\mathbb{C}$ qui sont $z_1=\frac{4-4i}{2}=2-2i \text{ et } z_2=\overline{z_1}=2+2i$.

Conclusion : $S=\{4;2-2i;-2+2i\}$.

2. $(E_p): z(z-4)(z^2-4z+4+p^2)=0 \text{ avec } p\in\mathbb{R}, p>0$.

(a) $(E_p): z(z-4)(z^2-4z+4+p^2)=0\Leftrightarrow z=0 \text{ ou } z=4 \text{ ou } z^2-4z+4+p^2=0$

Résolution de $z^2-4z+4+p^2=0 \text{ dans } \mathbb{C}$

$\Delta=(-4)^2-4\times1\times(4+p)^2=16-16-4p^2=-4p^2<0$ donc $z^2-4z+4+p^2=0$ a deux solutions complexes conjuguées dans $\mathbb{C}$ qui sont $z_1=\dfrac{4-i\sqrt{4p^2}}{2}=\dfrac{4-2pi}{2}=2-ip$ et $z_2=\overline{z_1}=2+ip$.

Conclusion : $S=\{0;4;2-ip;2+ip\}$.

Notons O(0), A(4) , Bp(2-i p) et Cp(2+i p).
On a Re(Bp) = Re(Cp) = 2 donc Bp et Cp appartiennent à la médiatrice de [OA] donc OBp = BpA et Ocp =CpA.
Comme Im(Bp) = -Im(Cp) on déduit que OBp = OCp.

Conclusion : OBp = BpA = CpA = OCp donc OBpACp est un losange.

On déduit que $A_{OBpACp}=\dfrac{BpCp\times OA}{2}=\dfrac{2p\times 4}{2}=4p$.

(b) Pour p = 2 on obtient la figure ci-dessous :