La calculatrice est interdite

Exercice 1

1. Déterminer l'ensemble des entiers x tels que $3x \equiv 2[5]$.
2. Déterminer l'ensemble des entiers x tels que $x^2 \equiv -1[5]$.
3. Déterminer l'ensemble des entiers x tels que $x^2 \equiv x-2[5]$.

Exercice 2

$\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = 2^{7n} - 28^n$

1. Calculer A_1 et A_2 .
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que peut-on conjecturer concernant les deux derniers chiffres dans l'écriture décimale de A_n puis démontrer la conjecture précédente.

Exercice 3

1. Soit $a \in \mathbb{Z}$. En utilisant un tableau, déterminer les restes possibles de $a^3 \text{ modulo } 7$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les restes possibles de $2^n \text{ modulo } 7$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation $(E_n): x^3 + 6 = 2^n$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$.

Correction

Exercice 1

$x\equiv ...[5]$	0	1	2	3	4
$3x\equiv ...[5]$	0	3	1	4	2
$x^2\equiv ...[5]$	0	1	4	4	1
$x-2\equiv ...[5]$	3	4	0	1	2

1. $3x\equiv 2[5]\Leftrightarrow x\equiv 4[5]$ donc $S=\{\ 5k+4, k\in\mathbb{Z}\}$
2. $x^2\equiv -1[5]\Leftrightarrow x^2\equiv 4[5]\Leftrightarrow x\equiv [5] \text{ou} x\equiv 3[5]$ donc $S=\{\ 5k+2, k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\ 5k+3, k\in\mathbb{Z}\}$
3. $x^2\equiv x-2[5]$ est impossible donc $S=\emptyset$.

Exercice 2

1. $A_1=2^7-28=128-28=100$
   $A_2=2^{7\times 2}-28^2=128^2-28^2=(108-28)(128+28)=100\times 156=15600$
2. Conjecture : $\forall n\in\mathbb{N}^*, A_n\equiv 0[100]$
   Démontrons la conjecture : Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a $A_n=2^{7n}-28^n=(2^7)^n-28^n$
   Or, $2^7=128\equiv 28[100]$ donc $(2^7)^n\equiv 28^n[100]$ et $A_n=(2^7)^n-28^n\equiv 28-28[100]\equiv 0[100]$.
   Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}^*, A_n\equiv 0[100]$.

Exercice 3

1. Soit $a\in\mathbb{Z}$. On a :

$a\equiv ...[7]$	0	1	2	3	4	5	5
$a^2\equiv ...[7]$	0	1	4	2	2	4	1
$a^3\equiv ...[7]$	0	1	1	6	1	6	6

   Conclusion : Les restes possibles pour $a^3 \text{modulo} 7$ sont 0 ; 1 et 6.

2. $\forall n\in\mathbb{N}, n=3k+r$ avec $k\in\mathbb{N}$ et $0\leqslant r<3$ donc $2^n=2^{3k+r}=(2^3)^k\times 2^r$ avec $0\leqslant r<3$
   Or, $2^3=8\equiv 1[7]$ donc $(2^3)^k\equiv 1^k[7]\equiv 1[7]$ donc $2^n\equiv 1\times 2^r[7]\equiv 2^r[7]$ avec $0\leqslant r<3$
   donc $2^n\equiv 1[7] si\, r=0$ ou $2^n\equiv 2[7] si\, r=1$ ou $2^n\equiv 4[7] si\, r=2$.

3. D'après le 1. , on a $\forall x\in\mathbb{Z}$:
   $x^3\equiv 0[7]$ ou $x^3\equiv 1[7]$ ou $x^3\equiv 6[7]$ donc $x^3+6\equiv 6[7]$ ou $x^3\equiv 7[7]\equiv 0[7]$ ou $x^3\equiv 12[7]\equiv 5[7]$

   D'après le 2. , on **a** $\forall n\in\mathbb{N}^*, 2^n\equiv 1[7]$ ou $2^n\equiv 2[7]$ ou $2^n\equiv 4[7]$
   donc $\forall x\in\mathbb{Z}, x^3+6\neq 2^n$ donc $S=\emptyset$.

Remarque : S'il existait $x\in\mathbb{Z}$ tel que $x^3+6=2^n$ alors les restes de $x^3+6 \text{ modulo } 7$ et $2^n \text{ modulo } 7$ seraient égaux.
Comme ce n'est jamais le cas, on déduit que l'équation $x^3+6=2^n$ n'a pas de solution.