Chapitre 6 : Fonction exponentielle

I. Généralités

Propriété et définition : Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

- $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)$
- $f(0) = 1$

Cette fonction est appelée exponentielle et est notée $\exp$ et se lit « exponentielle de x »

Démonstration :

- L'existence d'une telle fonction est admise

- <u>1ère étape</u> : montrons qu'une telle fonction f ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) = f(x) \times f(-x)$.
f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, φ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$
$\forall x \in \mathbb{R}, \phi'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-f'(-x))$
Or $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, \phi'(x) = f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) = 0$
donc $\phi = k(constante\ réelle)$.
Or $f(0) = 1$ donc $\phi(0) = f(0) \times f(0) = 1 \times 1 = 1\ donc\ \forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) = 1$
donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \times f(-x) = 1$ donc $f(x)$ ne peut jamais être nul.

- <u>2ème étape</u> : Montrons qu'il n'existe pas deux fonctions distinctes admettant ces propriétés.
On va raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe deux fonctions $f\ et\ g$ telles que $f' = f\ et\ g' = g$ et $f(0) = 1\ et\ g(0) = 1$.
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$.
Remarque : comme $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0, h(x)\text{est bien définie sur } \mathbb{R}$.
h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \frac{g'(x) \times f(x) - g(x) \times f'(x)}{(f(x))^2} = \frac{g(x) \times f(x) - g(x) \times f(x)}{(f(x))^2} = 0$$
donc $h = k(constante\ réelle)$.
Or $h(0) = \dfrac{g(0)}{f(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x)$ #

<u>Point Histoire</u> : Jean Bernoulli (1667-1748), mathématicien et physicien suisse, introduit les fonctions exponentielles dans une correspondance avec Leibniz (1646-1716, philosophe, scientifique, mathématicien, logicien, diplomate, juriste, bibliothécaire et philologue allemand), en 1694. Le mot exponentiel apparaît pour la première fois dans la réponse de Leibniz.

II. Propriétés fondamentales

Propriété : $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$

Démonstration :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\exp(a+b-x)\times\exp(x)$.
$u: x \to a+b-x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \to \exp(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $x \to \exp(a+b-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a fortiori f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)=(-1)\times\exp(a+b-x)\times\exp(x)+\exp(x)\times\exp(a+b-x)=0$ donc f est constante.
Or $f(b)=\exp(a)\times\exp(b)$ et $f(0)=\exp(a+b)\times\exp(0)=\exp(a+b)$
donc $f(0)=f(b)$ donc $\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$ #

Propriété : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x)>0$

Démonstration :
$\forall x \in \mathbb{R}, x=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}$ donc $\exp(x)=\exp(\frac{x}{2})\times\exp(\frac{x}{2})=(\exp(\frac{x}{2}))^2 \geqslant 0$
Or d'après la preuve de l'unicité de la fonction exponentielle, on sait que cette fonction ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc $\exp(x)>0$ #

Propriété : la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Démonstration :
$\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x)=\exp(x)>0$ donc $x \to \exp(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ #

Propriété : Soient $a \text{ et } b$ deux réels et n un entier relatif. On a :

$$\exp(-a)=\frac{1}{\exp(a)} \qquad \exp(a-b)=\frac{\exp(a)}{\exp(b)} \qquad (\exp(a))^n=\exp(na)$$

Démonstration :

1. $\exp(a-a)=\exp(a)\times\exp(-a)$ donc $\exp(0)=\exp(a)\times\exp(-a)$
   donc $1=\exp(a)\times\exp(-a)$ donc $\exp(-a)=\frac{1}{\exp(a)}$
2. $\exp(a-b)=\exp(a+(-b))=\exp(a)\times\exp(-b)=\exp(a)\times\frac{1}{\exp(b)}=\frac{\exp(a)}{\exp(b)}$
3. La démonstration par récurrence sera vue en terminale.
   Une démonstration figure en fin de chapitre par les suites géométriques.

#

Exercice 1 :

1. $f, g \text{ et } h$ sont trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\exp(x)+x$, $g(x)=x\exp(x)$ et $h(x)=\exp(x+2)$. Déterminer le sens de variation de ces trois fonctions.
2. La fonction k est définie sur $]0;+\infty[$ par $k(x)=\dfrac{\exp(x)}{x}$.

   Déterminer le sens de variation de k sur $]0;+\infty[$.

Exercice 2 :

1. Démontrer que $\forall x\in\mathbb{R}, (\exp(x))^2=\exp(2x)$
2. Soit $s: x \to \frac{1}{2}(\exp(x)-\exp(-x))$ et $c: x \to \frac{1}{2}(\exp(x)+\exp(-x))$

   (a) Vérifier que $\forall x\in\mathbb{R}, \exp(x)=c(x)+s(x)$ et $\forall x\in\mathbb{R}, \exp(-x)=c(x)-s(x)$

   (b) Démontrer que $\forall x\in\mathbb{R}, (c(x))^2-(s(x))^2=1$

   (c) Démontrer que $\forall x\in\mathbb{R}, c(2x)=(c(x))^2+(s(x))^2 \text{ et } s(2x)=2s(x)c(x)$

III. Notation e^x

Notation : $\exp(1)$ est noté « e » est un nombre irrationnel dont une valeur approchée est 2,7182.

On a donc $\forall n\in\mathbb{Z}, \exp(1\times n)=(\exp(1))^n$ donc $\boldsymbol{\forall n\in\mathbb{Z}, \exp(n)=e^n}$

Point Histoire : C'est en 1728, qu'Euler (1707-1783, mathématicien et physicien suisse), utilise pour la première fois la notation e.

Définition : on généralise cette écriture. $\forall x\in\mathbb{R}, \exp(x)=e^x$

Propriété :

1. La fonction $\exp: x \to e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}, (e^x)'=e^x$
2. Soit $a \text{ et } b$ deux réels on a $e^{a+b}=e^a\times e^b, e^{-a}=\dfrac{1}{e^a}$ et $e^{a-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$
3. Soit $n\in\mathbb{Z} \text{ et } a\in\mathbb{R}, e^{na}=(e^a)^n$
4. $e^0=1 \text{ et } \forall x\in\mathbb{R}, e^x>0$

Exercice 3 : compléter les égalités suivantes :

$e^2\times e^5=e^{\cdots}$ $\qquad e^{-3}=\dfrac{1}{\cdots}$ $\qquad \dfrac{e^9}{e^6}=e^{\cdots}$ $\qquad (e^8)^5=e^{\cdots}$

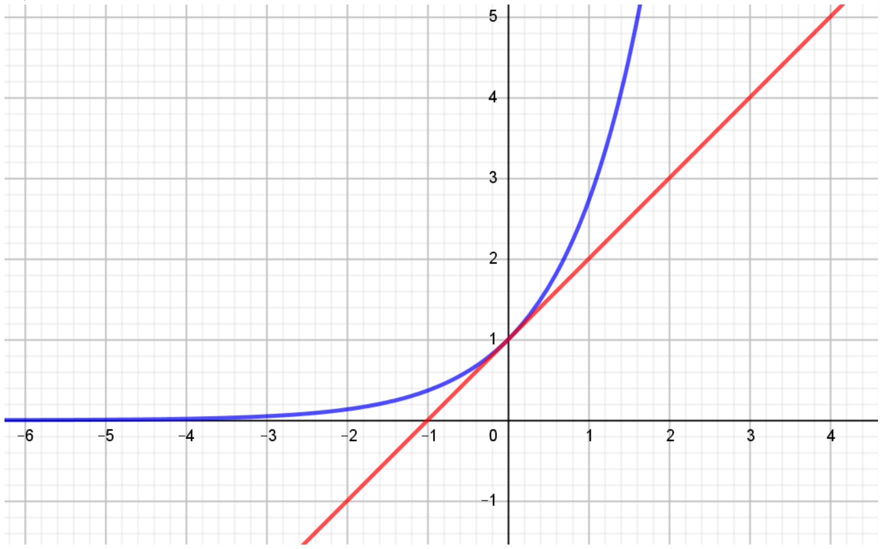
<u>Point calculatrice</u> : pour calculer, par exemple e^3, à la calculatrice, on tape :

Texas Instrument 84	Casio Graph 90+E	Numworks
Appuyer successivement sur les touches : 2nde ln 3 entrer	Appuyer successivement sur les touches : SHIFT ln 3 EXE	Appuyer successivement sur les touches : e^x 3 EXE

Source : Indice-Maths-1ère-bordas

IV. Courbe de la fonction exponentielle

Voici sa courbe représentative en bleu et sa tangente en x=0 en rouge.



Remarques :

- *La courbe exponentielle est située au dessus de sa tangente en x=0 sur* $\mathbb{R}$.
- *La courbe exponentielle est située au dessus de l'axe des abscisses* $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.
- *La courbe exponentielle coupe l'axe des ordonnées en A(0;1). On a* $e^0 = 1$.
- *La courbe exponentielle se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses lorsque x prend des valeurs négatives de valeur absolue de plus en plus grande.*

Propriété : a et b désignent des réels.

$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ $\qquad$ $e^a \leqslant e^b \Leftrightarrow a \leqslant b$ $\qquad$ $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Exercice 4 :

1. Simplifier :

$e^x \times e^{-x}$ $\qquad (e^{2x})^2 \times (e^{-x})^2$ $\qquad \dfrac{e^{3x} \times e^{4x}}{e^{2x-1}}$ $\qquad \dfrac{e^{2-3x}}{e^{x+1}}$

2. Établir que :

$\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ $\qquad \forall x \neq 0, \dfrac{e^x+1}{e^x-1} = \dfrac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$ $\qquad \forall x \neq 0, \dfrac{e^x}{e^x-1} - \dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$

$e^{-x+7} = e^{x+3}$ $\qquad e^{2-x} = 1$ $\qquad e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$ $\qquad e^{2x} \leqslant e^x$ $\qquad e^{2x} \leqslant 1$

V. Fonction $x \to e^{ax+b}$

Propriété :
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{f'(x) = a e^{ax+b}}$$

Plus généralement, on a la propriété suivante sur la composition de fonctions :

Propriété :
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I alors la fonction f définie par $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $f(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$.

Exercice 5 :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x+2}$. Étudier les variations de f .

VI. Suite de terme général $u_n = e^{na}$

Propriété : Pour tout réel a, la suite de terme général $\boldsymbol{u_n = e^{na}}$ est géométrique.

Démonstration :
Soit a un réel et n un entier naturel. On a :
$u_{n+1} = e^{(n+1)a} = e^{na+a} = e^{na} \times e^{a} = e^{a} u_n$ donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = e^{a}$
et de 1er terme $u_0 = e^{0 \times a} = e^{0} = 1$ #

Remarque : la suite (u_n) *de terme général* $u_n = e^{na}$ *est géométrique de raison* $q = e^{a}$ *et de 1er terme* $u_0 = 1$ *donc* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n = 1 \times (e^{a})^n = (e^{a})^n$ donc $e^{na} = (e^{a})^n$.
On a ainsi démontré le 3. $(\exp(a))^n = \exp(na)$ *de la propriété de début de chapitre par les suites.*

Deux exemples pour agrémenter cette propriété :

(1) La suite (u_n) de terme général $u_n = e^{-0,5n}$ est géométrique de raison $e^{-0,5} \approx 0,61$. (u_n) est donc décroissante et sa décroissance est dite exponentielle.	(2) La suite (v_n) de terme général $v_n = e^{0,5n}$ est géométrique de raison $e^{0,5} \approx 1,65$. (v_n) est donc croissante et sa croissance est dite exponentielle.