

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x)=(5-x)e^x$.

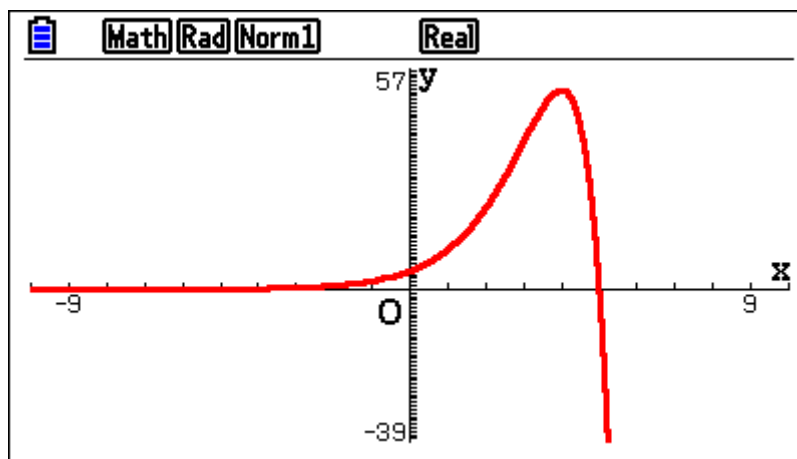
1. Exprimer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur \mathbb{R} .
3. En déduire les variations de f sur \mathbb{R} et construire son tableau de variations.
4. Tracer C_f à la calculatrice et vérifier la cohérence de vos résultats.

Correction

1. f est dérivable sur \mathbb{R} comme produit de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} .
 $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (-1) \times e^x + (5-x)e^x = -e^x + 5e^x - xe^x = 4e^x - xe^x = (4-x)e^x$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(4-x)$
 $4-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$ donc $f'(x) \geq 0$ sur $]-\infty; 4]$ et $f'(x) \leq 0$ sur $[4; +\infty[$
3. f est donc croissante sur $]-\infty; 4]$ et décroissante sur $[4; +\infty[$.

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	↗		↘

- f est donc croissante sur $]-\infty; 4]$ et décroissante sur $[4; +\infty[$.
- 4.



Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent avec :

$$f(x) = x e^x - 1$$

$$f(x) = (e^x + 1)(e^x - 3)$$

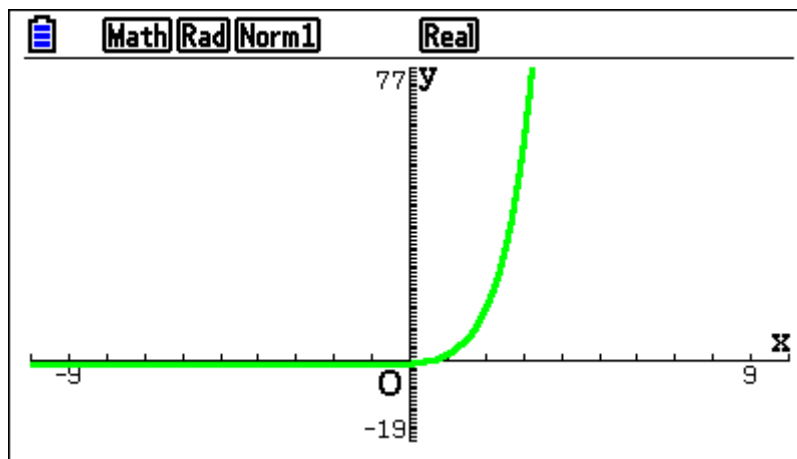
Correction

Étude de la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x e^x - 1$

1. $x \rightarrow x e^x$ est dérivable sur \mathbb{R} comme produit de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} donc f est dérivable sur \mathbb{R} .
 $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 \times e^x + x e^x - 0 = e^x + x e^x = (1+x)e^x$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(1+x)$
 $1+x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ donc $f'(x) \geq 0$ sur $[-1; +\infty[$ et $f'(x) \leq 0$ sur $] -\infty; -1]$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	\searrow	$-e^{-1} - 1$	\nearrow

3. f est donc décroissante sur $] -\infty; -1]$ et croissante sur $[-1; +\infty[$.



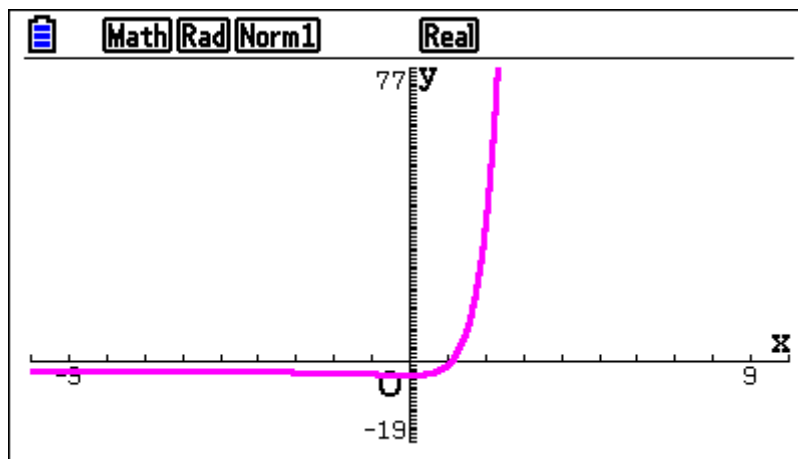
Étude de la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x)=(e^x+1)(e^x-3)$

1. f est dérivable sur \mathbb{R} comme produit de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} .
 $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x(e^x-3) + (e^x+1)e^x = e^x(e^x-3+e^x+1) = e^x(2e^x-2) = 2e^x(e^x-1)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de (e^x-1)
 $e^x-1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$
 donc $f'(x) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$ et $f'(x) \leq 0$ sur $] -\infty; 0]$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	↘	-4	↗

f est donc décroissante sur $] -\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

3.



Exercice 3

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x^2}{2e^x}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Démontrer que $f'(x)$ est du signe de $2x - x^2$.
3. En déduire les variations de f sur \mathbb{R} puis construire son tableau de variations.
4. Tracer C_f à la calculatrice et vérifier la cohérence de vos résultats.

Correction

1. f est dérivable sur \mathbb{R} comme quotient de deux fonctions dérivable sur \mathbb{R} dont le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R} .

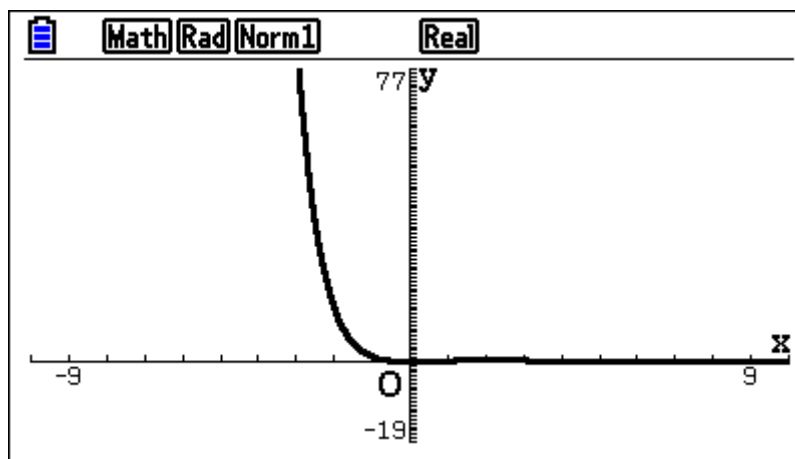
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2x \times 2e^x - 2e^x \times x^2}{(2e^x)^2} = \frac{4xe^x - 2x^2e^x}{4e^{2x}} = \frac{2e^x(2x - x^2)}{4e^{2x}} = \frac{x(2-x)}{2e^x}$$

2. Or, $\forall x \in \mathbb{R} e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x(2-x)$ sur \mathbb{R} .
 0 et 2 sont les deux racines du polynôme $2x - x^2$ et $a = -1 < 0$ donc
 $f'(x) \geq 0$ sur $[0; 2]$ et $f'(x) \leq 0$ sur $]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$

3. On déduit que f est croissante sur $[0; 2]$ et f est décroissante sur $]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$ d'où son tableau de variations :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0
f	↘ 0		↗ $\frac{2}{e^2}$	↘

- 4.



Exercice 4

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x}{x^2-3}$.

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} - \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.
2. Calculer $f'(x)$ sur $\mathbb{R} - \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.
3. Démontrer que $f'(x)$ est du signe de x^2-2x-3 sur $\mathbb{R} - \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.
4. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R} - \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.
5. Tracer C_f à la calculatrice et vérifier la cohérence de vos résultats.

Correction

1. La fonction f est définie pour les réels x pour lesquels le dénominateur ne s'annule pas c'est à dire pour lesquels $x^2-3 \neq 0$.
Or $x^2-3=0 \Leftrightarrow x^2-\sqrt{3}^2=0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$
On déduit que l'ensemble de définition de f est bien $\mathbb{R} - \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.

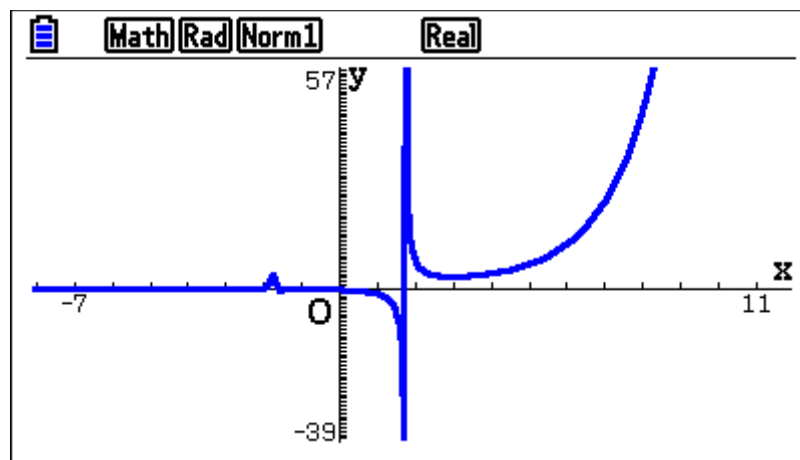
2. $\forall x \in \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}, f'(x) = \frac{e^x(x^2-3) - 2xe^x}{(x^2-3)^2} = \frac{e^x(x^2-2x-3)}{(x^2-3)^2}$

3. $\forall x \in \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}, (x^2-3)^2 > 0$ et $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de (x^2-2x-3) .

4. $x_1 = -1$ est une racine évidente donc la deuxième racine x_2 vérifie $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ donc $-x_2 = \frac{-3}{1} = -3$ donc $x_2 = 3$. $a = 1 > 0$ d'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$\sqrt{3}$	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0 -	-	- 0 +	
f	↗	↗	$-\frac{1}{2e}$	↘	$\frac{e^3}{6}$	↗

- 5.



Exercice 5

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x-2}{e^x}$ et on note C_f sa courbe.

1. Étudier les variations de f sur \mathbb{R} .
2. Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 3.
3. Tracer C_f à la calculatrice et vérifier la cohérence de vos résultats.

Correction

1. f est dérivable sur \mathbb{R} comme quotient de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} dont le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x - (x-2)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x+2)}{(e^x)^2} = \frac{e^x(-x+3)}{e^{2x}} = \frac{-x+3}{e^x}$$

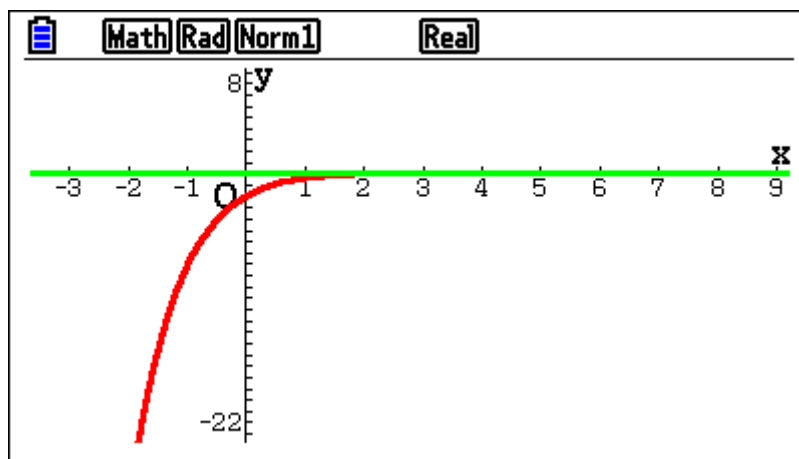
$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ et $e^{2x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-x+3)$ sur \mathbb{R} .
On déduit le tableau de variations de f sur \mathbb{R} :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	↗		↘
		$\frac{1}{e^3}$	

2. Une équation de la tangente T_3 à C_f en $x=3$ est :

$$y = f'(3)(x-3) + f(3) = 0(x-3) + \frac{1}{e^3} = \frac{1}{e^3}$$

- 3.



Exercice 6

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^{-2x}$ et on note C_f sa courbe.

1. Étudier les variations de f sur \mathbb{R} .
2. Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse -2.
3. Tracer C_f à la calculatrice et vérifier la cohérence de vos résultats.

Correction

1. f est dérivable sur \mathbb{R} comme produit de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-2x} + x \times (-2e^{-2x}) = e^{-2x}(1 - 2x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-2x} > 0 \text{ donc } f'(x) \text{ est du signe de } (1 - 2x) \text{ sur } \mathbb{R}.$$

On déduit le tableau de variations de f sur \mathbb{R} :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	↗		↘

2. Une équation de la tangente T_{-2} à C_f en $x = -2$ est :

$$y = f'(-2)(x+2) + f(-2) = 5e^4(x+2) + (-2e^4) = 5e^4x + 10e^4 - 2e^4 = 5e^4x + 8e^4$$

- 3.

