

## La calculatrice est autorisée

## Exercice 1

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite  $(u_n)$  où  $u_n$  désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année (2010+n). EN 2010, la forêt possède 50 000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre, chaque année, 5 % des arbres existants et de replanter 3000 arbres.

- Montrer que la situation peut être modélisée par  $u_0=50$  et pour tout entier naturel  $n$  par la relation  $u_{n+1}=0,95u_n+3$ .
- On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n=60-u_n$ .
  - Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 0,95.
  - Calculer  $v_0$ . Déterminer l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .
  - Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n=60-10 \times (0,95)^n$ .
- Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2015. On donnera une valeur approchée à l'unité.
- (a) Vérifier que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1}-u_n=0,5 \times (0,95)^n$ .  
(b) En déduire la monotonie de la suite.
- Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé de 10 % le nombre d'arbres de la forêt en 2010.

## Exercice 2

On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie par  $u_0=1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n-1$ .

On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n=4u_n-6n+15$ .

- Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique.
- Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ . En déduire  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$ .
- Montrer que  $u_n$  peut s'écrire  $u_n=t_n+w_n$  où  $(t_n)$  est une suite géométrique et  $(w_n)$  est une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.
- Exprimer  $T_n=t_0+t_1+\dots+t_n$  et  $W_n=w_0+w_1+\dots+w_n$  en fonction de  $n$ .
- En déduire  $U_n=u_0+u_1+\dots+u_n$  en fonction de  $n$ .

## Exercice 3

Depuis qu'il est à la retraite, un homme tond sa pelouse tous les samedis. Il recueille chaque fois 120 litres de gazon qu'il stocke dans un bac à compost de 300 litres.

Chaque semaine, les matières stockées perdent, après décomposition ou prélèvement les trois quarts de leur volume. Soit  $V_1, V_2, V_3$  les volumes en litres stockés respectivement les premier, deuxième et troisième samedis après la tonte. De manière générale, soit  $V_n$  le volume stocké le n-ème samedi après la tonte.

- (a) Montrer que  $V_1=120$  litres,  $V_2=150$  litres,  $V_3=157,5$  litres.  
(b) Calculer les volumes  $V_4, V_5, V_6$  exprimés en litres, stockés respectivement les quatrième, cinquième, sixième samedis après la tonte.
- Exprimer  $V_{n+1}$  en fonction de  $V_n$ .
- On définit, pour tout  $n \geq 1$ ,  $t_n$  par  $t_n=160-V_n$ .
  - Montrer que  $(t_n)$  est géométrique de premier terme  $t_1=40$  et de raison  $\frac{1}{4}$ .
  - En déduire les expressions de  $t_n$  puis de  $V_n$  en fonction de  $n$ .
  - Déterminer la limite de  $(t_n)$  puis celle de  $(V_n)$ .